BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.
Ch. Wink. del.
Söckler sc. 1779.

Ph. 3187

Math. P. 240

Mathesis. Algebra generalis.
229.

R

Abhandlung
der
Algebra,
nebst
derselben nützlichen Anwendung
auf die gemeine Rechenkunst, und auf
besondere Gegenstände der
Mathematik,
mit den
hierzu nöthigen Kupfertabellen
für Anfänger,
welche
diese einem Mathematiker unentbehrliche
Wissenschaft von sich selbst ohne mündliche
Anweisung lernen und begreifen
wollen,
entworfen
von

Johann Wolfgang von Jocher,
Pfalzbaierischen Ingenieurs Oberlieutenant.

Augsburg,
Bey Conrad Heinrich Stage.
1780.

* Diejenigen, die nicht gern die Vorberichte eines Buchs lesen, ersucht der Author recht freundschaftlich, nur dießmal sich die Mühe zu geben, seinen Vorbericht zu lesen. Es würde ihm sehr leid thun, wenn all das witzige Zeug, das da inne ist, unbewundert blieb.

Bayerische Staatsbibliothek München

Vorbericht.

Convectare juvat prædas, et vivere rapto.

Schon wiederum eine Abhandlung von der Algebra! — und warum denn endlich nicht? — Es schreiben ja mehrere zugleich über einen und eben den nämlichen Gegenstand anderer Wissenschaften, und werden auch künftig noch schreiben, immer einer mit mehr vermeintlichen Vorzuge, als der andre, und die Welt entscheidet jedesmal, wer denselben verdienet. Ich benutzte den mündlichen Unterricht meines Lehrers, darf ich denn nicht auch diesen benutzten Unterricht andern mittheilen? — —

 Aber,

Aber, meine Herren! warum ziehen sie ihre Gesichtszüge in so viel bedeutende kritische Falten zurück? — warum lassen sie mich nicht erst ausreden, ehe sie sich über mich her machen? — Sie meine ich, „die so über alles wegwischen, — „die aufs höchste den Titel eines Buchs „lesen, und denn dasselbe mit einem ih„nen eignen Stolze ungelesen hinwer„fen — die mit heisserer Lunge über je„de Sache (die sie öfters nicht einmal „nach ihrer Oberfläche kennen) recht „pädagogisch schön — voll selbst „Genügsamkeit deklamiren. Sind sie schon, wenn ich fragen darf, ausgemachte Algebraisten, oder sind sies nicht? — Im ersten Falle muß ich ihnen schon vorläufig sagen, daß ich für sie nicht schreibe, (ich bins selbst noch nicht.) Aber, wenn sies nicht sind, und wollen doch diese abstrakte Wissenschaft lernen,

so lesen sie ja zuvor das ganze Werk durch, ehe sie so gelehrt thun; seyn sie aber so gütig, bey jeder Zeile an das Titelblat sich zu erinnern, daß ich nur für Anfänger in der Algebra schrieb; und denn, wenn es ihnen nicht recht begreiflich vorkömmt, denn verschwenden sie ja die Zeit nicht umsonst mit Erlernung der Mathematik. Diese Wissenschaft fordert zuviel ordentliches Denken, und das ordentliche Denken, sagte mir öfters ein finsterer Mann, sey eben nicht jedes Sache: was kann denn ich oder sie dazu? — Sie sind also schon ein Algebraist, mein Herr! werden sie ja nicht böse; — doch! wozu kauften sie denn meine Abhandlung? Gestehen sie es nur; aus Neugier, nicht wahr? oder um mich zu beurtheilen? Recht so, das thun sie; aber thun sies ja, wenn sie mich erst mit Ueberlegung — ohne Vorurtheile

 durch-

durchgelesen haben. Ich lasse mich gern beurtheilen — radebrechen — nothzüchtigen, wie sie wollen, und wie sies am schicklichsten finden; — jeder Tadel ist mir angenehm, wenn er vernünftig ist, — wenn er mich eines bessern belehrt. Indessen, bis sie mich recht kunstmäßig abgethan haben, erlauben sie, (oder auch ohne ihre Erlaubniß) daß ich mit diesen rede, für die ich eigentlich schrieb — mit den Anfängern in der Algebra, die Willen und Genie haben, sich in der Mathematik zu vervollkommen.

Ich weis gar wohl, daß schon viele Abhandlungen in der Welt sind; aber ich weis auch, daß die wenigste das sind, was sie seyn sollen — für Anfänger seyn sollen, nämlich weder zu kurz, noch zu weitläuftig, und doch im Vortrage

begreiflich und deutlich. In einigen Büchern, welche überhaupts von der Mathematik handeln, wird entweder gar nicht, oder doch nur obenhin auch die Algebra abgehandelt; im ersten Falle setzt der Author schon alle, im andern doch schon einige Kenntnisse in der Algebra bey seinen Lesern voraus, oder verläßt sich auf den Beytrag einer mündlichen weitläuftigern Erläuterung. Es fehlte uns also (so viel mir wenigstens wissentlich) an einem besondern Elementarbuche in diesem Fache, das doch zugleich die Anwendung auf mathematische Gegenstände damit verbände; und dieß ist die eigentlich wahre Ursache, warum ich in der Welt als ein Author auftrete. [1]

[1] Weil ich meiner Einsicht selbst nicht zu viel allein zutraue, ersuchte ich den gelehrten und berühmten Herrn Professor der Mathematik bey der kur-

Die Quelle, aus der meine Grundsätze fließen, ist lauter, und mehrere meines gleichen haben dieser Quelle ihre Kenntnisse zu verdanken; sie fließt von dem Unterrichte des seligen Professors der Mathematik von der gewesten kurbaierischen adelichen Kadetten-Akademie, Herrn Stephan Stiglers. Ich merkte fast alles, was er mündlich vortrug, schriftlich an [2], und sammelte auch vieles aus einigen von ihm hinterlassenen Blättern. Aus Selbsterfahrung weis ich, wie unentbehrlich demjenigen, der sich zum Mathematiker bilden will, die Algebra sey, wenn er anders

kurfürstl. Akademie zu Ingolstadt, Johann Helfensrieder, diese meine Abhandlung zu durchgehen, welches er auch mit vieler Freundschaft that, und ein und anders hierinn verbesserte, wofür ich ihm hiemit öffentlich recht verbundenst danke.

[2] So was empfehle ich allen, absonderlich den Anfängern.

anders die meisten neuern Bücher verstehen — benützen — und sich den Namen eines Mathematiker verdienen will. Man muß oft aus Mangel der Einsicht in die Algebra die fürtrefflichsten Werke entrathen und beyseite legen: und ich glaube, durch meinen guten Willen diese Schwierigkeiten einigermaßen zu heben.

Meine Abhandlung soll also für Anfänger in der Algebra allgemein nützen, sie mögen noch gar keine, oder auch schon große Schritte (wenn man sie anders ohne die Algebra machen kann) in der Mathematik gemacht haben, beyde werden diese Abhandlung, leztere aber besonders auch zugleich ihre Anwendung mit Vortheil brauchen können.[3]

Sie soll keine ausgemachte Algebraisten bilden, sondern nur Anfänger zu-

3 Vielleicht kann auch dies Buch Prifatlehrern zu Erleichterung ihres mündlichen Unterrichts dienen.

richten, die sich sodenn auch über andere mit tieferer Einsicht niedergeschriebene Werke wagen dürfen, sollen.

Sie soll nicht zu stark, noch zu theuer werden, mithin zog ich sie, so viel möglich, zusammen; wodurch sie aber nichts an der Brauchbarkeit verlohr.

Ich suchte allgemein faßlich zu werden, machte also oft einige Wiederholungen — erläuterte durch Zusätze und Anmerkungen die Erklärungen und Grundsätze — wieß die Art der Berechnungen und Auflösungen, wo es nöthig war, umständlich und ausdrücklich so, als wenn ich mündlich unterrichtete, und berufte mich immer in allen auf vorgehende — schon abgehandelte Paragraphen.[4]

Ich

[4] Man wird so gut seyn, und mir dieses für keine Pedanterie ausrechnen. Ich dächte, ein Author, der belehren, und zugleich nützen will, müsse sich

Ich sahe mehr im Unterricht verständlich zu seyn, als auf die Schönheit des Styls. Ich schrieb nur zu belehren, und nicht zu belustigen.[5]

Ich drückte mich, so viel möglich, in unserer Muttersprache aus, daß auch die Unstudirte keinen Anstoß haben sollen.[6]

Die

sich überhaupt nach der Fähigkeit seiner Leser herablassen, und ein Buch müsse nicht nach dem Begriffe der besten, sondern auch für mittelmäßige Köpfe geschrieben seyn, damit leztere nicht verscheucht werden, und sich hundert Schwierigkeiten vorstellen, jemals etwas begreifen zu können.

5 Dieß mögen sich diejenigen merken, die sich gern mit Kleinigkeiten in ihrer Kritik abgeben.

6 Wenn hin und wieder einige Fehler wider die Rechtschreibkunst eingeschlichen, wird es eben auch nicht viel zu bedeuten haben. Denn ich glaube nicht, daß meine Leser, die Anfänger, aus meinem Buche die Orthographie lernen wollen. Nur muß ich erinnern, daß ich die Wörter von einer fremden Sprache (die ich überhaupts alle deutsch schrieb) nach der ihnen zukommenden Pronunziazion schrieb. Als z. B. sezte ich mit Fleiß statt den c und t — z, statt v in Mitte eines Worts f, u. s. w.

Die Lehrsätze, Grundsätze und Erklärungen sind jedesmal an der Stelle angebracht, wo sie eigentlich seyn sollen, und nicht vorläufig, oder hin und wieder zerstreuet abgehandelt, damit der Anfänger sie in der Folge nicht vergesse, und desto eher einsehe, zu was sie eben da stehen, und nicht anderswo. Auch werden alle Sätze sogleich allezeit durch Beyspiele bewiesen, welches den wahren Begriff der Sache bey einem Anfänger ungemein hurtig entwickelt.

Ich hielt mich überhaupts an die bey den alten Mathematikern schon gewöhnlich geweßte Ordnung und Lehrart, welche eben auch den Begriff des Lernenden, und ihre Freude allerdings befördert. Endlich [7]

Ich

7 Es wird eben nicht überflüßig seyn, wenn ich den Anfängern, die noch vielleicht keine Kenntnisse von dieser Lehrart haben, einigen Begriff von

Ich theilte die ganze Abhandlung in 8 Abtheilungen; diese wieder in ihre besondere Theile und Paragraphen.

„Nun

---

von derselben mittheile. Die aber diese Kenntnisse schon haben, oder doch zu haben glauben, für die mag freylich diese Erläuterung nicht wohl angebracht seyn; nu! ärgern sie sich nur nicht; — sie können ja diese Note überschlagen.

Die Lehrart der Mathematiker, das ist, die Ordnung, der sie sich in ihrem Vortrage bedienen, fängt an von den Erklärungen, gehet fort zu den Grundsätzen, und von diesen zu den Lehrsätzen, Lehnsätzen, Beweisen, Aufgaben und Auflösungen, überall aber werden Zusätze und Anmerkungen angehängt.

Die Erklärungen sind, in welchen entweder die Wörter, oder die Sachen durch solche Kennzeichen beschrieben werden, dadurch man sie von andern unterscheiden, und das übrige herleiten kann, was man von ihnen unterscheiden soll.

Grundsätze sind, darinn ein allgemeiner Vortrag enthalten, den jedermann wegen seiner Klarheit als wahr zuläßt, ohne daß man vonnöthen hat, denselben zu beweisen.

Willkürliche Sätze, darinn zwar etwas nach Willkühr angenommenes, doch mögliches enthalten ist.

„Nun merken sich die Anfänger, „wer in ganzen und gebrochenen Zahlen „der gemeinen Rechenkunst fertig addi-„ren, subtrahiren, multipliciren und „dividiren kann, der darf sich nur in der „Algebra üben.

„Wer

Lehrsätze sind, in welchen zwar ein richtiger Vortrag enthalten, welcher aber erst zu beweisen ist, ehe er als richtig kann zugelassen werden.

Lehnsätze sind eigentliche Lehrsätze, welche unterdessen als bewiesen angenommen werden, bis man sie anderswoher beweisen kann.

Aufgaben sind, in welcher etwas zu machen vorgetragen wird.

Auflösungen, in welchen die Regeln gegeben werden, wie solches zu machen sey.

Beweise, in welchen die Ursachen enthalten, warum das gemachte durch die vorgeschriebne Art herausgebracht wird.

Zusätze sind Folgungen, die entweder aus einem andern Satze hergeleitet, oder ein Satz mehr beleuchtet.

Anmerkungen sind, in welchen enthalten, was noch hin und wieder außer der Ordnung zu erinnern nützlich und nothwendig ist: sie können überall angebracht werden.

„Wer die Algebra und derselben Anwendung inne hat, der braucht in der „Mathematik nur wenig zu lernen, und „wird doch viel verstehen. Er darf sein „Gehirn nicht durch vieles auswendig „lernen austrocknen, und kein verdrüßliches Mischmasch von Regeln besitzen. „Er ist selbst im Stande, die nützlichst „und neuesten Regeln zu machen, und „kann sich selbst, so zu sagen, hierinn „ein Schöpfer werden.

„Ohne die Algebra bleiben wir immer nur noch Anfänger in der Mathes, „und unzählbare Größen bleiben uns „unbekannt.

„Es ist aber auch ein wesentlicher „Unterschied zwischen der Algebra selbst, „und zwischen derselben Anwendung. „Jene zeigt uns die Regeln, nach welchen man arbeiten muß, diese aber ist „eine Sammlung allerley Uebungen und

„Bey-

„Beyspiele, die wirklich nach diesen „Regeln ausgeführt worden.

„Wer etwas gründlich lernen will, „der muß eine Fertigkeit haben, alles „deutlich zu begreifen und genau unter„suchen zu können, ob dasjenige, was „er hört und liest, Wahrheit sey, und „durch nichts lernt man ordentlicher und „richtiger denken, als durch die Mathe„matik, warum die Sachen so sind, „und nicht anders. Man muß etwas „nicht deswegen mit einem blinden Köh„ler-Glauben für wahr annehmen, weil „es dieser oder jener hochgelehrte Mann „so sagt, man muß auch untersuchen, „ob er die Wahrheit sagt.

„Alle Fertigkeit kömmt durch die „Uebung, nicht aber allein durch die „Regeln, die man zu beobachten hat. „Die Lehrart kann uns wohl die Regeln, „nicht aber das Vermögen geben, dieselbe „fertig auszuüben.

„Die

„Die Lehren müssen nicht in das „Gedächtniß allein, sondern auch im „Verstande gefasset werden.

„Der Lehrer muß den Lernenden, „oder der Lernende sich selbst bey jeder „Handlung fragen, warum er dieß so, „und nicht anders machet, damit man „nicht nur allein den Grund der Rech„nungen einzusehen, und sie daher besser zu „behalten, sondern auch dazu angewöhnt „werde, nichts ohne hinlänglichen Grund „von jemanden anzunehmen, und in al„lem, was man sieht — was man hört, „sich um seinen Grund zu bekümmern.

„Wenn man eine Rechnungsart „recht verstehet, muß man sich selbst auf „die Erklärungen, auf die Lehr- Grund- „und Zusätze zurückführen, die sich auf „diese Rechnungsart beziehen, und durch „Gegenhaltung der gemachten Beyspiele „zeigen, wie dasjenige darinn vorkömmt

„und erblickt wird, was in der Erklä=
„rung stehet.“

Dieser Vorbericht soll für Anfänger genug seyn. Meine Absicht war bloß, diesen und vielleicht auch jenen Nutzen zu schaffen, deren Beruf es schon wirklich ist, mit der Mathematik sich abzugeben. Erreiche ich diese Absicht, so bin ich für meinen guten Willen hinlänglich belohnt. Kenner sollen meine Abhandlung, und die Bewegursache, warum ich sie niederschrieb, beurtheilen.

Johann Wolfgang v. Jocher,
Pfalzbaierischer
Ingenieurs Oberlieutenant.

Verzeichniß

des ganzen Inhalts

nach den Abtheilungen, derer besondern Theilen und Paragraphen.

I. Abtheilung.

Von den allgemeinen Erklärungen und den vier Rechnungsarten in Ganzen und Brüchen.

Paragraphen.		Seite.
1 — 15.	Von den allgemeinen Erklärungen.	1 — 6
16 — 25.	Von der Addition und Reduktion algebraischer Größen.	6 — 11
26 — 28.	Von der Subtraktion.	11 — 13
29 — 37.	Von der Multiplikazion.	14 — 20
38 — 42.	Von der Disision.	20 — 25
43 — 59.	Von den vier Rechnungsarten in Brüchen.	26 — 34
60 — 62.	Von Erfindung der Disisoren.	34 — 37

§§. Seite.

II. Abtheilung.

63—75. Von den Potenzen oder Dignitäten. 38—46
76—79. Von den Wurzeln der Potenzen. 46—48
80—92. Von den Irrazionalwurzeln und unmöglichen Größen. 48—53
93—102. Von den binomischen Wurzeln und ihren Potenzen. 54—59

III. Abtheilung.

103—107. Von den einfachen und quadratischen Gleichungen. 60—61
108—113. Von der Transposizion. 61—63
114—117. Von der Division. 63—65
118—120. Von der Multiplikazion. 65—67
121—125. Von der Substituzion. 67—69
126—132. Von den quadratischen, sowohl von den reinen, als unreinen Gleichungen. 70—73

IV. Abtheilung.

133—142. Von den Verhältnissen und Proporzionen. 74—76

143

§§.		Seite.
143—149.	Von den arithmetischen Proporzionen.	76—78
150—159.	Von den arithmetischen Progressionen.	79—84
160—175.	Von den geometrischen Proporzionen.	84—90
176—184.	Von den geometrischen Progressionen.	90—94

V. Abtheilung.

185—197.	Von den Gleichungen zerschiedner Grade.	95—101
198—208.	Von der Veränderung der Gleichungen.	101—110

VI. Abtheilung.

209—221.	Von Auflösung der algebraischen Ausgaben, und Anwendung auf die gemeine Rechenkunst.	111—124

VII. Abtheilung.

222—231.	Anwendung der Algebra auf die Geometrie.	125—133

VIII. Abtheilung.

§§.		Seite.
232—235.	Besondere Anwendung der Algebra auf die Kegelschnitte.	134—136
236—254.	Von der Parabel.	136—142
255—266.	Von der Elipsis.	143—150
267—283.	Von der Hyperbel.	150—160

Abhand-

Abhandlung und Anwendung der Algebra.

I. Abtheilung.

Von den allgemeinen Erklärungen und den vier Rechnungs-Arten in Ganzen und Brüchen.

Von den allgemeinen Erklärungen.

§. I.

Erklärung.

Alles, was sich und in so weit es sich vermehren oder vermindern, vergrößern oder verkleinern läßt, wird eine Quantität oder Größe genennt.

§. II.

Zusatz. Unter den Größen können also Gulden, Linien, Figuren, Zahlen, und alle Dinge verstan-

den werden, wenn man sie blos so weit betrachtet, als sie sich vermehren oder vermindern, vergrößern oder verkleinern lassen.

§. III.

Erklärung. Die Größen, welche so gegeneinander betrachtet werden, daß eine den entgegengesezten Verstand von der andern hat, oder, daß eine die andere vermindert, werden entgegengesezte oder bejahende und verneinende, insgemein positife und negatife Größen genennt: z. B. 6 fl. Schulden und 4 fl. Vermögen, weil dieses jene, und jene dieses mindern. Aus gleicher Ursache sind vor und rückwärts gehen entgegengesezte Größen.

§. IV.

Willkürlicher Saz. Damit man die positife Größen von den negatifen unterscheiden könne, setzet man selben ein Zeichen vor, und zwar den positifen das Zeichen (+), welches das Zeichen der Addition ist, und mehr ausgesprochen wird; den negatifen aber das Zeichen (—), welches das Zeichen der Subtraktion ist, und weniger ausgesprochen wird: z. B. 5 fl. + 16 gr. zeiget an 5 fl. mehr 16 gr. oder, daß man 16 gr. zu 5 fl. addiren soll; entgegen 5 fl. — 16 gr. zeiget an 5 fl. weniger 16 gr., oder daß man 16 gr. von 5 fl. zu subtrahiren habe.

§. V.

Anmerkung. Man kann zwar bey entgegengesezten Größen, was man für eine will, als positif an-

annehmen, wenn man sodenn die andere als negatif betrachtet, weil allezeit eine die eine Verneinung von der andern ist. Allein: da dieses gleichgültig ist, wollen wir, um alle Verwirrung zu vermeiden, unterdessen die Größen, die man nach der gemeinen Rechnung abziehen müßte, mit (—), die andere mit (+) bemerken, bis die Gelegenheit kömmt, in der sich die Gleichgültigkeit dieser Wahl deutlicher erklären läßt. Nur dieß ist zu beobachten, daß man vor den Größen, sie mögen durch Zahlen oder auf eine andere Art ausgedrückt seyn, allzeit (+) supponire, oder solche als positife ansehe, wenn selben nicht wirklich (—) vorgesezt ist: z. B. 5 — 3 zeiget an soviel, als + 5 — 3, und 7 soviel als + 7.

§. VI.

Willkürlicher Satz. Weil man sich eben sowohl durch die Buchstaben des Alphabets verschiedene Größen vorstellen kann, wie sich in der gemeinen Rechenkunst durch die Ziffer verschiedene Größen vorstellen lassen, nimmt man insgemein, zu Vermeidung aller Weitläuftigkeit, und zu Erhaltung allgemeiner Gründe (wie sich solches in der Folge genugsam zeigen wird) statt der Zahlen die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets an, und zwar also, daß die bekannte Größen mit den ersten Buchstaben a, b, c 2c. die unbekannte mit den lezten x, y, z angezeigt werden: jedoch daß man nicht die Größen von verschiedener Art vermische, druckt man nur die Größen von der nemlichen Art durch den nemlichen Buchstaben aus.

§. VII.

Zusatz. Man giebt dahero jeder Größe von verschiedener Art einen andern Buchstaben, z. B. wenn man die Gulden *a* nennt, nennt man die Groschen *b*, die Kreuzer *c*, oder wenn sie unbekannt, die Gulden *x*, die Groschen *y*, und *z* die Kreuzer, will man also nach dieser Benennung 4 fl. 5 gr. 2 kr. ausdrücken, schreibt man $4a + 5b + 2c$.

§. VIII.

Anmerkung. Damit man vorläufig wisse, was zusammengesezte Buchstaben bedeuten: z. B. *ab*, oder *abc*, so habe ich, bis wir zur Multiplikation selbst kommen, indessen melden wollen, daß sie Produkte seyn, welche die zusammengesezte Buchstaben zu ihren Faktorn haben: als *ab* ist das Produkt vom *a*, multiplizirt mit *b*, und *abc* das Produkt vom *ab* multiplizirt mit *c*.

§. IX.

Erklärung. Wenn die algebraische Größe ohne dem Zeichen + oder — stehen, werden sie inkomplechs genennt; sind aber die Größen durch die Zeichen + oder — verbunden, nennt man sie komplechs. z. B. *ab*, *abc* sind inkomplechs, $ab + cd$, oder $ac + cd - de$ sind komplechse Größen.

§. X.

Erklärung. Die Termini einer komplechsen Größe, sind die Theile, welche durch + oder — voneinander gesondert sind: z. B. von $ab + bc - bd$

$- bd$ sind die Termini, ab, bc, bd, sie werden ähnlich genennt, wenn sie einerley Buchstaben haben: wie z. B. $4ab$ und ab.

§. XI.

Erklärung. Den verschiedenen Ausdruck einerley Größe nennt man eine Gleichung: das Zeichen aber ($=$), welches zwischen den verschiedenen Ausdrücken vom Einerley Größe gesezt wird, das Zeichen der Gleichheit: z. B. $6a - 2a = 4a$, $5a + 2a = 10a - 3a$, sind Gleichungen, weil die Größen beiderseits gleich, die Ausdrücke aber verschieden sind.

§. XII.

Erklärung. Die Wissenschaft, welche lehret, wie man vermittels der Gleichungen durch bekannte Größen die unbekannte finden könne, wird die Algebra, oder Analysis speziosa genennet, wenn man die Buchstaben statt der Ziffern in der Rechnung gebraucht.

§. XIII.

Anmerkung. Obwohl man in der Analysi speziosa statt der Zahlen Buchstaben annimmt, so sind sie wegen diesem doch nicht gänzlich ausgeschlossen, sie werden vielmehr öfters sehr vortheilhaft zu Hilfe genommen. Man setze z. B. daß $a = 100$ wäre, und daß man solches fünfmal, das ist, $a + a + a + a + a$ nehmen soll, so wird ohne Zweifel statt dessen der Ausdruck $5a$ weit füglicher seyn.

§. XIV.

Erklärung. Die Zahl, die vor einer durch Buchstaben angemerkter Größe stehet, und anzeiget, wie oft der Buchstab soll genommen werden, heißt der Koeffizient: z. B. von 5 *a* ist der Koeffizient 5, und zeiget an, daß man *a* fünfmal nehmen soll, von 3 *ab* ist er 3, und zeiget an, daß man *ab* dreymal nehmen soll. (*)

§. XV.

Anmerkung. Haben die Buchstaben keine Zahl vor sich, verstehet man unter dem Koeffizienten allzeit (1) oder, daß man die durch den Buchstab angemerkte Größe einmal nennen soll. z. B. unter *a* und *ab* verstehet man 1 *a* und 1 *ab*.

Von der Addition und Reduktion algebraischer Größen.

§. XVI.

Lehrsatz. Die Summe von ähnlichen Terminis oder Größen, die einerley Zeichen haben, erlanget man, wenn man (wie in der gemeinen Rechenkunst) die Koeffizienten addirt, und die Summe der Koeffizienten mit dem nemlichen Zeichen wiederum den nemlichen Buchstab vorsetzet.

Beweis.

(*) Man nennet aber auch Buchstaben, die miteinander ein Faktum machen, Koeffizienten desselben, sonderlich die ersten des Alphabetes, also in dem Produkte *ax* ist *a* der Koeffizient dieses Produkts.

Beweis. Denn, weil die Koeffizienten anzeigen, wie oft eine Größe soll genommen werden (nach §. 14) so will man z. B. durch die Addirung 4 *abc* zu 3 *abc*, *abc* viermal und dreymal, das ist, siebenmal, oder 7 *abc* haben, und da alle Theile der Summe das nemliche Zeichen haben (per hypoth.) folgsam muß nothwendig auch die ganze Summe das nemliche Zeichen haben, das ist + seyn, wenn alle zu addirende Theile + sind, und —, wenn sie — sind.

§. XVII.

Zusatz. Es ist also z. B.

zu	*ab*	—	*ab*
addirt	2 *ab*	—	2 *ab*
die Summe	3 *ab*	—	3 *ab*

§. XVIII.

Lehrsatz. Ungleiche und entgegengesezte ähnliche Größen werden addirt, wenn man die kleinere von der größern abziehet, und dem Rest das Zeichen von der größern giebt. z. B.

zu	+ 8 *a*	oder	zu	— 8 *a*
addirt	— 5 *a*		addirt	+ 5 *a*
giebt	+ 3 *a*		giebt	— 3 *a*

Beweis. Denn, weil es solche Größen sind, die einander vermindern, (nach §. 3. u. 4.) kann nur noch der Rest von der größern übrig bleiben, und, weil der Rest ein Theil von der größern Quantität oder Größe ist, muß er nothwendig das Zeichen von der größern Quantität, das ist + haben,

wenn die größere Quantität + hat, und —, wenn sie — hat.

§. XIX.

Zusatz. Weil von ungleichen und entgegengesezten ähnlichen Terminis nur der Rest von den größern übrig bleibet, so folget nothwendig, daß bey gleichen entgegengesezten gar kein Rest übrig bleibe, oder daß sie sich gegeneinander heben. z. B.

	zu $4\,abc$	oder	zu ab
addirt	$-4\,abc$		addirt $-ab$
giebt	$\emptyset$		$\emptyset$

§. XX.

Zusatz. Und da man nur ähnliche Terminos als Größen von der nemlichen Art (nach §. 6.) durch die Koeffizienten addiren kann, werden die unähnliche blos durch das Zeichen + zusammgehängt. z. B. wenn man

zu ab
addiren soll bc und $bd - cd$
schreibet man $ab + bc + bd - cd$.

§. XXI.

Erklärung. Die Reduktion ist eine Verrichtung, durch welche (so viel es seyn kann) alle Termini und derer Buchstaben ordentlich gesetzet, und auf einen einfachen Ausdruck gebracht werden.

§. XXII.

Lehrsatz. Bey der Reduktion müssen alle Termini und die Buchstaben von jedem Termino so gesetzet werden, daß sie (so viel es seyn kann) nach der Ordnung des Alphabets gehen. z. B.

statt $dc + cab - bd + edg$

muß man setzen $abc + cd - bd + edg.$

Beweis. Denn durch die Erhaltung der Ordnung wird die Rechnung erleichtert.

§. XXIII.

Lehrsatz. Alle ähnliche Termini, welche einerley Zeichen haben, müssen addirt werden (nach §. 16.) z. B. wenn man

$5a - 2b + 2a - b$ oder $5a + 2a - b - 2b$

ordinirt hat, addirt man

$5a$ und $2a$, wie auch $-b$ und $-2b$.

giebt $7a - 3b$.

Beweis. Denn dadurch werden die Größen auf weniger Terminos gebracht, und also der Ausdruck einfacher gemacht.

§. XXIV.

Lehrsatz. Alle ähnliche Termini, wenn sie entgegengesezte Zeichen haben und gleich sind, müssen (nach §. 19.) gehoben, oder wenn sie ungleich sind (nach §. 18.) addirt werden. z. B.

statt $2ab + bc - 2ab + bd$.

muß man setzen $bc + bd$, weil sich $+2ab$ und $-2ab$ heben. Und

statt $4ab - ab + cd - 2cd$
muß man setzen $3ab - cd$, weil $4ab - ab = 3ab$, und $cd - 2cd = -cd$, folgsam die ganze Summe nur $3ab - cd$ ist.

Beweis. Er beruhet auf dem vorigen Grunde.

§. XXV.

Aufgabe. Algebraische komplechse Größen zu addiren.

Auflösung. Man setzet die zu addirende Terminos mit ihren Zeichen (so viel es seyn kann) nach der alphabetischen Ordnung. Reduzirt die ähnliche Terminos (nach §. 23.) wenn sie einerley: und (nach §. 24.) wenn sie verschiedene Zeichen haben, schreibet zu diesen addirten Terminis die unähnliche mit ihren Zeichen, so ist die Addition vollendet. z. B. wenn man zu

$$3ab + 2bc - 5ad - bd$$

addiren soll

$$2ab + bc + 2ad + bd$$

setzet man

$$3ab + 2bc - 5ad - bd + 2ab + bc + 2ad + bd.$$

Diese Summe reduzirt man nach vorbemeldten (§§.) so wird sie in einem einfachern Ausdruck seyn:

$$5ab + 3bc - 3ad.$$

Oder soll man zu

$$3ab - b + bd - cd$$

addiren

$$ab + 3b + c - d$$

setzet man wiederum

$$3ab - b + bd - cd + ab + 3b + c - d.$$

Re=

Reduziret von dieser Summe die ähnliche Terminos, und setzet die unähnliche mit ihren Zeichen dazu, so wird die Summe wieder im einfachern Ausdruck seyn

$$4ab + 2b + bd + c - cd - d. \ (*)$$

Beweis. Denn, weil alle Termini oder Theile durch ihre Zeichen zusammgenommen werden, müssen sie die Summe ihrer zu addirenden Größen ausmachen, und, da durch die Reduktion nicht die Größe, sondern nur der Ausdruck verändert wird, muß ebenfalls die reduzirte Summe die Summe der zu addirenden Größe seyn.

Von der Subtraktion.

§. XXVI.

Lehrsatz. Die Größen werden voneinander subtrahirt, wenn man nach Verwechslung ihrer Zeichen von den zu subtrahiren habenden Größen in entgegengesezte Zeichen, das ist — wenn sie +, und +, wenn sie — sind, zu den Größen setzet, von denen sie sollen subtrahirt werden, und darauf eine Reduktion machet.

Beweis. Was den ersten Fall anbelanget, ist es aus (§. 5.) richtig, daß man z. B. aus + a machen

---

(*) Um aber in der Reduktion nicht irre zu werden, thut man gut, wenn man die ähnliche Terminos untereinander setzet, und ein Strich darunter machet, unter dem man die Summe schreibt. z. B.

$$\begin{array}{ll} & 3ab + 2bc - 5ad - bd \\ & 2ab + bc + 2ad + bd \\ \hline \text{Summe} & 5ab + 3bc - 3ad \end{array}$$

machen muß $-a$, wenn man es von einer andern Größe, als: $3a$ subtrahiren soll, oder daß $3a-a$ die Differenz zwischen $3a$ und a sey.

Im zweyten Falle muß durch $+$ wieder ersetzet werden, was wegen $-$ zu viel abgezogen worden. z. B. wenn man von $3a$ subtrahiren soll $a-b$, soll man nicht ganz a, sondern nur die um b verminderte Größe a abziehen.

Folgsam, wenn man, wie im ersten Falle ganz a von $3a$ abziehet oder $3a-a$ setzet, wird durch $-a$ von $3a$ das Ganze b zuviel abgezogen, und die Differenz $3a-a$ ist dahero um b kleiner, als sie seyn soll; man muß also durch $+b$ bey $3a-a$ ersetzen, was wegen $-b$ zuviel ist abgezogen worden, das ist, aus $-$, $+$ machen, um die ganze Differenz $3a-a+b$ zu erhalten.

Endlich die Reduktion muß darum gemacht werden, damit die Differenz auf einem einfachern Ausdruck komme.

§. XXVII.

Anmerkung. Zu mehrer Deutlichkeit wollen wir den zweyten Fall durch Zahlen erläutern. Wir wollen setzen, man müsse von 12 die Größe $6-2$ abziehen, so muß man (nach diesem Lehrsatz) setzen $12-6+2$ oder $14-6$, davon die Differenz 8 ist; denn, weil $6-2=4$, sieht man, daß man von 12 nicht mehr, als 4, abziehen soll, und daß man also, wenn man, statt 4, die Zahl 6 abgezogen hat, man 2 von 12 zuviel weggenommen habe, folgsam wieder durch $+2$ ersetzen müsse, was man wegen -2 zuviel weggenommen hat.

§. XXVIII.

§. XXVIII.

Aufgabe. Algebraische Größen zu subtrahiren.

Auflösung. Man verwechselt die Zeichen der zu subtrahirenden Größe in entgegengesezte, wenn sie + sind, macht man —, und wenn sie —, macht man + daraus: setzet sie zu den größern, von denen sie sollen subtrahiret werden, und reduzirt sie, wenn ähnliche Termini zugegen sind, (nach §. 25.) so ist die Subtraktion vollendet. z. B.

wenn man von	ab
subtrahiren will	cd
schreibet man	$ab - cd$.
Will man von	$ab + cd$
subtrahiren	$bd - de$
schreibet man	$ab + bc - bd + de$.

Oder sind dabey ähnliche Termini. z. B.

Man will von	$3ab + 2bc - 4bd + de$
subtrahiren	$ab + 2bc - 3bd + dg$
setzet man	

$$3ab + 2bc - 4bd + de - ab - 2bc + 3bd - dg$$

welches die Differenz ist.

Oder (nach §. 25.) $2ab - bd + de - dg$. welches die reduzirte Differenz ist. (*)

Beweis. Dieser beruhet völlig auf §. 26.

Von

(*) Oder besser, um nicht irre zu werden, setzet man sie also an:

$$\begin{array}{l} 3ab + 2bc - 4bd + de \\ ab - 2bc + 3bd - dg \\ \hline 2ab - 7bd + de - dg \end{array}$$

Von der Multiplikation.

§. XXIX.

Willkürlicher Satz. Wenn man anzeigen will, daß Zahlen oder Buchstaben miteinander sollen multiplizirt werden, setzet man zwischen selbe das Zeichen (.) oder einen Punkt. z. B.

Man will anzeigen
daß 4 mit 3, a mit b
oder aa mit ab
soll multiplizirt werden,
setzet man $4 . 3$, $a . b$
$aa . ab$.

Insgemein aber setzet man die Buchstaben als Faktores gleich zusamm, man schreibet also:

ab statt $a . b$, $aaab$ statt $aa . ab$.

§. XXX.

Anmerkung. Statt des Punkts bedient man sich öfters, voraus bey wirklicher Berechnung, des Zeichen (×). z. B.

Wenn man 4 mit 3, oder aa mit ab
multipliziren will,
setzet man 4×3, $aa \times ab$.

§. XXXI.

Willkürlicher Satz. Will man anzeigen, daß eine Reihe Größen soll multiplizirt werden, schließet man sie in ein Parenthesin ein (), und setzet die Größe, mit der man alle Terminos multipliziren soll, vor oder nach dem (). z. B.

Wenn

Wenn man $a - b + c$ durch d,
oder $a + b - d$ durch $b - d$
multipliziren soll,
setzet man
$(a - b + c) . d$, und $(a + b - d) . (b - d)$.
öfters findet man statt dessen
$\overline{a - b + c} . d$, und $\overline{a + b - d} . (b - d)$

§. XXXII.

Willkürlicher Satz. Wenn ein Buchstab oder Größe, ein- oder mehrmal mit sich selbst multiplizirt wird, setzet man rechter Hand oberhalb dem Buchstaben eine Zahl, welche anzeigt, wie oft die Zahl mit sich selbst sey multiplizirt worden. z. B. setzet man statt aa, a^2, statt aaa, a^3, statt $aaaa^4$.

§. XXXIII.

Lehrsatz. Wenn man zwo Größen miteinander multiplizirt, welche einerley Zeichen haben (es mögen die Zeichen + oder — seyn) so geben sie im Produkte +, entgegen aber —, wenn sie verschiedene Zeichen haben, nemlich eine + die andere —, oder (den Satz kürzer auszudrücken) einerley Zeichen geben +, verschiedne —.

Beweis. Was den ersten Fall belanget, ist es ohnehin klar, daß auch im Produkte + seyn müsse, wenn beyde Faktores + haben. z. B. Daß $a . d$, ad
gebe (nach §. 29.)

Im

Im zweyten Falle, wenn die Größen verschiedene Zeichen haben, nemlich die eine + die andere —, muß durch — wiederum das vom Produkte abgezogen werden, um was es wegen Verschiedenheit der Zeichen zu groß geworden. Denn z. B.
Wenn man ganz a mit d multiplizirt,
bekömmt man ad,
und multiplizirt man $a-b$ mit d,
bekömmt man anfänglich auch ad:
Nun ist aber $a-b$ kleiner als a (nach §. 4.)
derowegen muß auch das Produkt aus $a-b$ im d kleiner seyn, als ad,
und zwar um das Produkt bd,
weil $a-b$ um b kleiner, als a,
und b genommen d male, bd ist,
Damit also vom Produkte ad das Produkt bd, um welches ad zu groß ist, weggenommen werde, muß man nothwendig, um das wahre Produkt zu erhalten $(a-b).d, = ad - bd$ setzen:
das ist $-b.+d$ giebt $-bd$
oder verschiedene Zeichen geben —.

Im dritten Falle, wenn beyde Größen — haben, muß ihr Produkt + bekommen. Denn, man multiplizirt z. B. $a-b$ mit $c-d$,
und zwar anfänglich $a-b$ mit c,
so wird nothwendig das Produkt $(a-b).c$
$= ac - bc$ zu groß.
Weil man nicht mit ganz c, sondern nur mit der um d verminderten Größe c, oder mit $c-d$ multiplizieren soll:
das ist, man hat $a-b$, d mal zu viel genommen:

Sub-

Subtrahirt man dahero vom $ac - bc$, $(a - b) \cdot d = ad - bd$ (nach §. 28.)

Erhält man zum wahren Produkt, $ac - bc - ad + bd$.

Aus dem man siehet, daß $-b \cdot -d = bd$ oder allgemein $-$ mit $-$, $+$ gebe.

§. XXXIV.

Anmerkung. Um diese zween letztere Fälle durch Zahlen begreiflicher zu machen, wollen wir setzen, daß man $5 - 3$ mit 4 multipliziren soll, weil $5 - 3 = 2$, soll man 4 eigentlich nur mit 2, nicht mit 5 multipliziren, oder man muß (nach dem zweyten Falle dieses Lehrsatzes) auch 3 mit 4 multipliziren, und dieses Produkt von dem Produkt aus 5 in 4 abziehen.

Da nun $(5 - 3) \cdot 4 = 20 - 12 = 8$, und $4 \cdot 2 = 8$, so siehet man die Richtigkeit dieses Satzes auch in Zahlen.

Eben so zeigt sich diese Richtigkeit im dritten Falle. Denn z. B.

$$7 - 3 = 4, \text{ und } 6 - 2 = 4.$$

also ist $(7 - 3) \cdot (6 - 2) = 4 \cdot 4 = 16$ und $(7 - 3) \cdot (6 - 2) = 42 - 32 + 6 = 16$ (nach §. 25. und §. 31.)

§. XXXV.

Aufgabe. Größen zu multipliziren, sie mögen einerley oder verschiedene Zeichen haben.

Auflösung. Man multiplizire erstlich mit einem Termino des Multiplikatoris den ersten Terminum der zu multiplizirenden Größe, und zwar, anfänglich beyde Koeffizienten (wenn eine zugegen sind) darauf die Buchstaben (nach §. 29.) setzet hinter das Produkt der Koeffizienten das Produkt der Buchstaben, und machet +, wenn beyde Termini einerley; —, wenn sie verschiedene Zeichen haben. Eben so multiplizirt man nach und nach mit dem nämlichen Termino des Multiplikatoris alle andere Terminos der zu multiplizirenden Größen, (nur daß man (nach §. 33.) die Zeichen beobachtet) ist dieß geschehen, fänget man mit einem andern Termino des Multiplikatoris auf eine gleiche Weise an, wiederum alle Terminos der zu multiplizirenden Größe zu multipliziren, und setzet die Produkte (welche ähnliche Terminos formiren) untereinander. So verfähret man mit allen Terminis des Multiplikatoris, und addirt darauf alle partikuläre Produkte in eine Summe (nach §. 25.) so ist die Multiplikation vollendet. Dieses allein ist noch zu erinnern, daß, wenn eine Größe als Faktor einen Koeffizienten hat, die andere nicht, man unter dessen Koeffizienten allezeit (1) verstehe (nach §. 15.) z. B. es sey zu multipliziren

$$\begin{array}{rl} & 3a + b - c \\ \text{mit} & 2b - 3c + d \\ \hline \text{I. Produkt} & 6ab + 2bb - 2bc \\ \text{II. Produkt} & -9ac - 3bc + 3cc \\ \text{III. Produkt} & 3ad + bd - cd \\ \hline \text{Summe} & 6ab - 9ac + 3ad + 2bb - 5bc \\ & + bd + 3cc - cd \end{array}$$

Saget man 3 . 2 giebt 6, und $a . b$ giebt ab, folgsam $3a . 2b$ giebt $6ab$.

2 . 1 giebt 2 und $b . b$ giebt bb, folgsam $2b . + b$ giebt $+ 2bb$.

+ 2 . − 1 giebt − 2, $b . c$ giebt bc, folgsam $+ 2b . - c$ giebt $- 2bc$.

so hat man das erste Produkt. Eben so verfährt man mit $- 3c$, und mit $+ d$, daß man die andere zwey Produkte auch erhält, addirt (nach §. 25.) die drey Produkte zusammen, so hat man die Summe der Produkte von allen Terminis oder den ganzen Größen.

Beweis. Denn durch diese Verrichtung hat man die Produkte von allen Terminis oder Theilen der zu multiplizirenden Größen erhalten (nach §§. 29. und 33.) und solche zusammgenommen (nach §. 25.) Nun sind die Produkte aller Theile zusammgenommen den Produkten der ganzen gleich, folgsam hat man dadurch erhalten das Produkt der ganzen zu multiplizirenden Größen.

§. XXXVI.

Zusatz. Multiplizirt man folgende Größen auf die nämliche Art, so kömmt heraus:

 $a + b$

$$\begin{array}{lr}
 & a+b \\
\text{mit} & a+b \\
\hline
\text{I. Prod.} & aa+ab \\
\text{II. Prod.} & +ab+bb \\
\hline
\text{Summe} & aa+2ab+bb
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
 & a-b \\
\text{mit} & a-b \\
\hline
\text{I. Prod.} & aa-ab \\
\text{II. Prod.} & -ab+bb \\
\hline
\text{Sum̃e} & aa-2ab+bb
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
 & a+b \\
\text{mit} & a-b \\
\hline
\text{I. Prod.} & aa+ab \\
\text{II. Prod.} & -ab-bb \\
\hline
\text{Summe} & aa-bb
\end{array}$$

Dahero kann man (nach §. 31.) setzen

$(a+b).(a+b)$ statt $aa+2ab+bb$
$(a-b).(a-b)$ statt $aa-2ab+bb$
$(a+b).(a-b)$ statt $aa-bb$

§. XXXVII.

Anmerkung. Diese Zerfällung der Produkte in ihre Faktores verdienet seine sonderheitliche Erinnerung, weil man dadurch öfters in Bestimmung der Größen nicht geringe Vortheile erhält.

Von der Difision.

§. XXXVIII.

Lehrsatz. In der Difision geben einerley Zeichen +, verschiedene —, wie in der Multiplikation.

Beweis. Denn, wenn man ein Produkt durch einen Faktor difidirt, ist der Quozient der

der andere Faktor: multiplizirt man dahero
$-a$ mit $+b$
ist das Produkt $-ab$.
Dividirt man durch $-a$ in $-ab$ zurück, muß der Quozient, als der andere Faktor, wiederum
$+b$,
und wenn man durch $+b$ in $-ab$ dividirt,
$-a$ werden.
Auf gleiche Weise, wenn man $-a$ multiplizirt mit
$-b$
wird das Produkt $+ab$:
folgsam, da man ab dividirt
durch $-a$,
muß der Quozient, als der andere Faktor, ebenfalls
werden $-b$ oder $-a$,
da man durch $-b$ dividirt.
Dividirt man das Produkt ab
durch a oder b,
wird der andere Faktor allezeit $+$ haben,
weil $+a . +b = ab$;
mithin geben auch in der Division einerley Zeichen $+$ verschiedne $-$, wie in der Multiplikation.

§. XXXIX.

Aufgabe. Algebraische Größen zu dividiren, sie mögen einerley Zeichen und einerley Koeffizienten haben, oder nicht.

Auflösung. Man dividirt sowohl die Koeffizienten (wenn eine zugegen sind) als Buchstaben (wie in der gemeinen Rechenkunst) nur daß man dem Quozienten allezeit $+$ gebe (wenn die Zei-

chen einerley) — (wenn selbe verschieden sind, und bey dem Multipliziren und Addiren nach §§. 33. und 26. die behörige Setzung der Zeichen beobachtet wird) z. B. Man soll $ab - ac + ad$ dividiren

durch a] Quozient

I. Fall. Dividendus $ab - ac + ad$] $b - c + d$.

Divisor a

Produkt $-ab$

Rest $-ac + ad$

Divisor a

Produkt $+ac$

Rest $+ad$

Divisor a

Produkt $-ad$

Rest $\emptyset$

so saget man a in ab ist b mal enthalten, schreibet b zum Quozienten an, multiplizirt b mit dem Divisor a giebt ab, dieses Produkt von dem Dividendo (nach §. 26.) subtrahirt, bleibt zum Rest $-ac + ad$.

Darauf sagt man wiederum a ist in $-ac$ enthalten $-c$ mal, schreibt $-c$ zum Quozienten, multiplizirt den Divisor a mit dem Quozienten $-c$, giebt $-ac$, subtrahirt dieses Produkt von $-ac + ad$, bleibet noch zum Rest $+ad$.

Endlich sagt man, a in $+ad$ ist enthalten d mal, schreibet $+d$ zum Quozienten an, multiplizirt a mit $+d$, giebt $+ad$, subtrahirt dieses Produkt von dem Rest, so ist die Division vollendet.

Auf gleiche Weise verfährt man, wenn der Divisor eine komplechse Größe ist. z. B.

Man

Man ſoll $aa - 2ab + bb$ dividiren
durch $a - b$.

II. Fall.

		Quozient
Dividendus	$aa - 2ab + bb$	$a - b$
Diviſor	$a - b$	
Produkt	$-aa + ab$	
Reſt	$-ab + bb$	
Diviſor	$a - b$	
Produkt	$+ab - bb$	
Reſt	0	

Man ſagt nämlich: a in aa iſt enthalten a mal, ſetzet a zum Quozienten, multiplizirt mit dem Quozienten a den Diviſor $a - b$, giebt $aa - ab$, ſubtrahirt dieſes Produkt von dem Dividendo, bleibt zum Reſt $-ab + bb$. Darauf dividirt man wiederum mit dem erſten Termino des Diviſoris in den erſten Terminum des Reſts, und ſagt: a in $-ab$ iſt enthalten $-b$ mal, ſetzet $-b$ zum Quozienten an. Multiplizirt den Diviſor $a - b$ mit dem Quotienten $-b$, giebt $-ab + bb$, und ſubtrahirt dieſes Produkt von dem Reſt, bleibt 0 übrig.

Eben ſo dividirt man die Größen, wenn der Diviſor und Dividendus Koeffizienten haben, z. B. man will dividiren

$$6ac + 4ax - 9bc - 6bx$$

durch $3c + 2x$.

III. Fall.

Dividendus	$6ac + 4ax - 9bc - 6bx$	Quozient $2a - 3b$
Divisor	$3c + 2x$	
Produkt	$-6ac - 4ax$	
Rest	$-9bc - 6bx$	
Divisor	$3c + 2x$	
Produkt	$+9bc + 6bx$	
Rest	$\emptyset$	

Man sagt 3 in 6 ist enthalten 2 mal, und c in ac, a mal, folgsam $3c$ in $6ac$, $2a$ mal. Diese $2a$ schreibet man zum Quozienten hin, multiplizirt mit $2a$ den Divisor $3c + 2x$ giebt $6ac + 4ax$, und subtrahirt dieses Produkt von dem Dividendo, bleibt zum Rest $-9bc - 6bx$.

Man dividirt mit dem ersten Termino des Divisors wiederum $-9bc$, und sagt, 3 in -9 ist enthalten -3 mal, und c in bc, b mal, folgsam $3c$ in $-9bc$, $-3b$ mal, schreibet $-3b$ zum Quozienten, multiplizirt solches darauf mit dem Divisor $3c + 2x$, giebt $-9bc - 6bx$, und subtrahirt solches Produkt von dem Rest, so ist die Division gleichfalls vollbracht.

Beweis. Er ist der nemliche, wie in der gemeinen Rechenkunst bey der Division, wenn man (nach §. 38.) die Zeichen beobachtet.

§. XL.

Willkürlicher Satz. Hat der Divisor und Dividendus ganz verschiedene Buchstaben, daß die Division nach voriger Aufgabe nicht angehet,

setzet

setzet man blos bruchweiß den Divisorem unter dem Dividendo. z. B.

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{a+b}{c+d}$$

Oder man zeiget auch die Division durch das Zeichen (:) an. z. B.

$$a:b,\ (a+b):(c+d)$$

§. XLI.

Zusatz. Weil

$(ab-ac+ad):a=b-c+d$ (nach §. 39.)

so ist verkehrt

$(ab-ac+ad):(b-c+d)=a$

folgsam, wenn in einer komplechsen Größe alle Termini einen gemeinschaftlichen Buchstaben haben, darf man nur mit der Summe aller noch übrigen Buchstaben solche Größe dividiren, um den gemeinschaftlichen Buchstaben als Quozienten allein zu bekommen.

§. XLII.

Anmerkung. Weil die Brüche in Zahlen als bloße Verhältnisse der Zähler zu ihren Nennern, unbenanntliche Größen sind, so ist zwar in beyden Arten das Berechnen einerley, wenn man nur, wie bey den ganzen Größen, die Zeichen beobachtet. Jedoch, damit man sich nach der Hand um so leichter auf solche berufen könne, wollen wir davon die vier Rechnungsarten in aller Kürze anführen.

Von den vier Rechnungsarten in Brüchen.

§. XLIII.

Lehrsatz. Jede ganze Größe kann man als einen Bruch ansehen, dessen Nenner (1) ist.

Beweis. Denn weil z. B.

1 im a, a mal, oder 1 in ma, ma mal enthalten ist,

kann man

$$\frac{a}{1} \text{ statt } a \text{ oder } \frac{ma}{1} \text{ statt } ma \text{ setzen.}$$

§. XLIV.

Aufgabe. Brüche unter einerley Benennung zu bringen. z. B.

$$\frac{n}{m} \text{ und } \frac{r}{s}$$

Auflösung. Man multiplizirt (wie in der gemeinen Rechenkunst) wechselsweis durch eines Bruchs Nenner des andern Bruchs Zähler und Nenner, so sind die Brüche unter einerley Benennung gebracht, als:

$$s \cdot \frac{n}{m} = \frac{ns}{ms}, \quad m \cdot \frac{r}{s} = \frac{rm}{ms}$$

§. XLV.

Aufgabe. Brüche zu addiren.

Auflösung. Wenn die Brüche unter einerley Benennung gebracht sind, addirt man die Zähler

(nach

(nach §. 24.) und schreibet den gemeinschaftlichen Nenner darunter. z. B.

$$\frac{ns}{ms} + \frac{rm}{ms} = \frac{ns + rm}{ms}$$

§. XLVI.

Anmerkung. Sind mehrere Brüche zu addiren, z. B.

$$\frac{n}{m}, \frac{r}{s}, \frac{x}{y}$$

bringet zuvor zween unter einerley Benennung, und addirt sie, darauf bringet man die Summe der beeden Brüche mit dem dritten Bruche unter einerley Benennung, und addirt solchen zu der Summe der beyden Brüche. z. B.

$$\frac{n}{m} + \frac{r}{s} = \frac{ns + rm}{ms}$$

folgsam

$$y \cdot \left(\frac{ns + rm}{ms}\right) = \frac{nsy + rmy}{msy} \text{ (nach §. 44.)}$$

$$ms \cdot \frac{x}{y} = \frac{msx}{msy}$$

und also

$$\frac{n}{m} + \frac{r}{s} + \frac{x}{y} = \frac{nsy + rmy + msx}{msy}$$

§. XLVII.

Aufgabe. Brüche zu subtrahiren.

Auflösung. Wenn die Brüche unter einerley

Be=

Benennung gebracht sind, subtrahirt man (nach §. 28.) die Zähler, und setzet den gemeinschaftlichen Nenner darunter. z. B.

$$\frac{n}{m} \quad \frac{r}{s} = \frac{ns}{ms} \quad \frac{rm}{ms}$$

folgsam

$$\frac{n}{m} - \frac{r}{s} = \frac{ns - rm}{ms}$$

§. XLVIII.

Aufgabe. Brüche mit Brüchen, oder mit Ganzen zu multipliziren.

Auflösung. Man multiplizirt (nach §. 35.) die Zähler mit den Zählern, und die Nenner mit den Nennern, und schreibet unter das Produkt der Zähler das Produkt der Nenner an. z. B.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \text{ oder } \frac{a}{-b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{-bd}$$

$$\frac{-a}{-b} \cdot \frac{c}{-d} = \frac{-ac}{bd}, \quad \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{b+c} = \frac{aa}{b+c}$$

§. XLIX.

Aufgabe. Einen Bruch durch einen andern, oder auch durch ein Ganzes zu dividiren.

Auflösung. Den Bruch, mit dem man dividiren soll, verkehrt man, und multiplizirt (nach voriger Aufgabe) die obere Größen miteinander, setzet darauf unter das Produkt der obern, das Produkt der untern Größen. z. B. Man soll

$\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ oder $-\frac{ac}{b}$ durch $b = \frac{b}{1}$

dividiren,

verkehrt man

$$\frac{c}{d} \text{ in } \frac{d}{c} \text{ und } \frac{b}{1} \text{ in } \frac{1}{b}$$

so sind

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \text{ und } -\frac{ac}{b} \cdot \frac{1}{b} = -\frac{ac}{bb}$$

die Quozienten.

§. L.

Anmerkung. Die Beweise von diesen vier Rechnungsarten wären überflüßig: denn was die Setzung der Zeichen anbelangt, sind dieselben schon bey den ganzen Größen gegeben worden: im übrigen aber sind sie die nemliche, welche man in der gemeinen Rechenkunst hat. Statt dessen wollen wir untersuchen, wie man bey einem Bruche, dessen Nenner zusammengesetzt ist, den Quozienten (durch Näherung zu finden) suche, weil es eine Aufgabe von verschiednen nützlichen Folgerungen ist.

§. LI.

Aufgabe. Einen Bruch, dessen Nenner zusammgesezt ist, zu dividiren, als:

$$\frac{a}{b+c}$$

Auflösung. Man stellet gänzlich die Division an (nach §§. 39. und 49.) z. B.

Divi

Dividendus a
Divisor $b+c$

Quozient $\frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} - \frac{accc}{bbbb}$ u. s. w.

Produkt $-a - \frac{ac}{b}$

Rest $-\frac{ac}{b}$

Divisor $b+c$

Produkt $+\frac{ac}{b} + \frac{acc}{bb}$

Rest $+\frac{acc}{bb}$

Divisor $b+c$

Produkt $-\frac{acc}{bb} - \frac{accc}{bbb}$

Rest $-\frac{accc}{bbb}$ u. s. w.

Man sagt nemlich

b ist in a enthalten $\frac{a}{b}$ (nach §. 40.)

schreibet $\frac{a}{b}$ zum Quozienten an,

multiplizirt mit diesem Quozienten den Divisorem $b+c$, giebt $\frac{b+c}{1} \cdot \frac{a}{b}$ oder $\frac{ab+ac}{b} = a + \frac{ac}{b}$,

subtrahirt (nach §. 38.) dieß Produkt von dem Dividendo, und setzet unter denselben

den Rest $-\frac{ac}{b}$,

in-

in den Rest $-\frac{ac}{b}$ dividirt man wiederum mit dem ersten Termino des Divisoris, und sagt

b in $-\frac{ac}{b}$ ist enthalten $-\frac{ac}{bb}$ male,

setzet $-\frac{ac}{bb}$ zum Quozienten an,

multiplizirt mit demselben den Divisorem $b+c$, giebt $\frac{(b+c)}{1} \cdot -\frac{ac}{bb} = -\frac{abc-acc}{bb}$

oder reduzirt $-\frac{ac}{b} - \frac{acc}{bb}$,

subtrahirt dieses Produkt von dem Rest $-\frac{ac}{b}$,

bleibt $+\frac{acc}{bb}$,

in diesen Rest dividirt man gleichfalls durch b, giebt zum Quozienten

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{acc}{bb} = \frac{acc}{bbb} \text{ (nach §. 49.)}$$

multiplizirt mit diesem Quozienten den Divisorem, giebt

$\frac{b+c}{1} \cdot \frac{acc}{bbb} = \frac{abcc+accc}{bbb}$ oder $\frac{acc}{bb} + \frac{accc}{bbb}$,

subtrahirt dieses Produkt von dem Reste $+\frac{acc}{bb}$,

bleibt $-\frac{accc}{bbb}$. u. s. w.

und

und auf solche Weise kann man immer wiederum in die neu herauskommende Reste difidiren, damit man dem wahren Quozienten um so näher komme: doch wo man auf hört zu difidiren, muß der letzte Rest mit seinem Difisore (wie in der sonst gewöhnlichen Difision) gesezt werden.

§. LII.

Anmerkung. Kürze halber wird obige Reihe der Quozienten so ausgedrückt (nach §. 32.)

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4}, \text{ u. s. w.}$$

§. LIII.

Zusatz. Wenn man setzet

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 1,$$

so ist (weil 1 allzeit 1 bleibt, so oft man 1 mit sich selbst multiplizirt, oder 1 durch 1 difidirt)

$$\frac{a}{b+c} = \frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ u. s. w.}$$

§. LIV.

Anmerkung. Gudiograndus hat hieraus die Schöpfung aus nichts herleiten wollen; denn weil $+1-1=0$ und $\frac{1}{2} = 1-1+1-1$ u. s. w. ist, hat er geschlossen, daß, wenn bey einer unendlichen Reihe die Anzahlen $+1-1=0$ gleich sind, aus unendlichen vielen 0 eine positife Größe, nämlich

$$\frac{1}{1+1} \text{ oder } \frac{1}{2} \text{ entstehen könne.}$$

Vielleicht

Vielleicht hat er aber nicht darauf gedacht, daß eine Anzahl nicht unendlich sey, so bald man solcher auf gerad oder ungerade Schranken setzet: daher fällt auch dieser Schluß, daß bey einer ungeraden Anzahl $1 = \frac{1}{2}$ sey. Man muß entweder, um die wahre Gleichheit zu erhalten, die Division unendlich, und also weder gerade noch ungerade fortsetzen, oder den Rest mit seinem Divisore zu dem Quozienten addiren.

§. LV.

Zusatz. Wenn man

$a = 1,\ b = 2,\ c = 1$ annimmt:

so ist (nach §. 52.)

$$\frac{a}{b+c} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \text{ u. s. w.}$$

§. LVI.

Anmerkung. Dividirt man

a durch $b-c$ statt $b+c$, (nach §. 51.)

kommt für den Quozienten folgende Reihe heraus

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} \text{ u. s. w.}$$

§. LVII.

Zusatz. Setzet man

$a = 1,\ b = 1,\ c = m,$

ist $$\frac{a}{b-c} = \frac{1}{1-m} = 1 + m + m^2 + m^3, \text{ u. s. w.}$$

§. LVIII.

Zusatz. Setzet man

$$a = 1,\ b = 1,\ c = 1$$

ist $\frac{a}{b-c} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1+1+1+1+1$, &c.

also ist 1 in Ansehung 0 unendlich groß.

§. LIX.

Zusatz. Setzet man aber

$$a = 1,\ b = 2,\ c = 1$$

ist $\frac{a}{b-c} = \frac{1}{2-1} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ u. s. w.

Von Erfindung der Divisoren.

§. LX.

Erklärung. Die Erfindung der Divisorum lehret nichts anders, als die Zahlen oder Buchstaben zu bestimmen, durch welche sich eine Zahl, oder durch Buchstaben ausgedrückte Größe ohne Rest dividiren läßt.

§. LXI.

Aufgabe. Die Divisores einer Zahl zu finden.

Auflösung. Man probirt die Division nach und nach durch ganz kleine Zahlen, bis man eine findet, durch welche sich der Dividendus genau dividiren läßt. Auf gleiche Weise probirt man die Division in den herauskommenden Quozienten, bis man wieder eine Zahl erhält,

hält, durch welche sich der Quozient ohne Rest dividiren läßt, und so dividirt man immer in alle nachkommende Quozienten, so weit man ohne Rest kann, nimmt jede zwey, drey und vier angewendte Divisores, auch den lezten Rest (wenn er nicht 1 ist) zusammen, multiplizirt sodenn jede zwey, drey, vier Divisores u. s. w. miteinander, so sind die Produkte aus diesen angewendten Divisoribus, die gefundene Divisores. z. B.

Man möchte wissen, durch was für Zahlen sich die 360 Grade eines Zirkels dividiren lassen, Probirt man die Division mit 2, und findet, daß der Quozient genau sey

180.

Auf gleiche Weise siehet man, daß sich 180 genau durch 3 dividiren lassen, und der neue Quozient werde 60.

Man probirt wieder die Division in 60 durch 3, und bekömmt zum Quozienten

20,

ingleichen durch 4 in 20, und erhält zum neuen Quozienten 5

endlich dividirt man 5 durch 5, bleibet für den lezten Quozienten 1.

Nun sind die angewendte Divisores

2, 3, 3, 4, 5.

Man nimmt dahero jede zwey von diesen zusammen, und multiplizirt sie miteinander, so sind die gefundene Divisores

von jeden zween

$2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$, $2 \cdot 5 = 10$,

$3 \cdot 3 = 9$, $3 \cdot 4 = 12$, $3 \cdot 5 = 15$, $4 \cdot 5 = 20$.

Von jeden dreyen,

$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$, $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$

$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Von jeden vieren,

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 72$, $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 180$.

Von all fünfen,

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 360$

das ist, 360 läßt sich ohne Rest dividiren durch

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

§. XLII.

Zusatz. Auf die nämliche Art kann man die Divisores in der Buchstaben Rechnung finden. z. B.

Man soll für

$$aabb + aaab$$

die Divisores bestimmen:
so probirt man erstlich die Division mit a, und erfährt, daß der Quozient ohne Rest werde

$$abb + aab.$$

Man dividirt wiederum diesen Quozienten mit b, und erlangt zum neuen Quozienten genau

$$ab + aa.$$

Man

Man siehet endlich auch, daß sich $ab+aa$ genau durch $b+a$ dividiren lasse, und daß der Quozient davon werde

a (nach §. 41.)

welcher Quozient sich ebenfalls durch a dividiren läßt. Die angewendte Divisores sind also

$$a, b, b+a, a$$

folgsam die gefundene

von jeden zween,

$$ab, ab+aa, aa, bb+ab.$$

Von jeden dreyen,

$$abb+aab, aab.$$

Von jeden vieren,

$$aabb+aaab,$$

dahero läßt sich $aabb+aaab$ ohne Rest dividiren.

Durch

$$a, b, b+a, aa, ab, bb+ab,$$
$$abb+aab, aab, aabb+aaab.$$

Beweis. Denn, weil in beyden Fällen, die ganze zu dividirende Größe genau in dem Produkt aller angewendten Divisorum enthalten ist, müssen auch die Produkta von jeden zween, dreyen, und vieren Divisorn in dem Dividendo enthalten seyn.

II. Abtheilung.

Von den Potenzen, oder Dignitäten, und ihren Wurzeln.

§. LXIII.

Erklärung.

Eine jede Größe a, wenn sie als einfach angesehen wird, nennt man eine Potenz oder Dignität vom ersten Grade.

Wenn sie aber ein, zwey, drey, viermal u. s. w. mit sich selbst multiplizirt wird, nennt man das herauskommende Produkt eine Potenz vom zweyten, dritten, vierten Grade ꝛc.

Und die Zahl, welche über die einfache Größe oder Potenz vom ersten Grade (die man insgemein die Wurzel nennt) geschrieben ist, und angiebt, wie oft die einfache Größe als Faktor ist gesezt worden, den Echsponenten oder Grade der Potenz. z. B.

Wenn man a als eine einfache Größe oder Potenz vom ersten Grade ansieht, so ist

$a = a^1$ die Wurzel.

$a \cdot a = a^2$ die Potenz vom zweyten Grade.
$a \cdot a \cdot a = a^3$ die Potenz vom dritten Grade ꝛc.
$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$ die Potenz vom vierten Grade.

und die Grade oder Echsponenten sind

1, 2, 3, 4.

Weil

Weil sie anzeigen, wie oft bey jeder dieser Potenzen, a, als Faktor ist genommen worden, sieht man a^2, als eine einfache Größe an: so ist

a^2	die Wurzel oder	Potenz	vom ersten	Grade
a^4	- -		vom zweyten	
a^6	- -		vom dritten	
a^8	- -		vom vierten	

der Echsponent der Wurzel

2.

der nachkommenden Potenzen

4, 6, 8,

sonderheitlich nennt man wegen der Aehnlichkeit mit der Ausmessung des Quadrats und des Kubi
die Potenz vom zweyten Grade das Quadrat,
die vom dritten den Kubum,
ihre Wurzeln aber, die Quadrát und Kubikwurzel.

§. LXIV.

Zusatz. Weil die Brüche nur der Größe nach von ihren Ganzen unterschieden sind, können sie gleichfalls Potenzen vom verschiedenen Grade seyn, nachdem sie nämlich mit sich selbst öftermale multiplizirt werden. z. B.

Wenn man $\frac{a}{bb}$ als eine Potenz vom ersten Grade ansieht,

so ist (nach §. 48.)

$$\frac{a}{bb}\cdot\frac{a}{bb}=\frac{a^2}{b^4}\quad\text{eine Potenz vom zweyten Grade}$$

$$\frac{a}{bb}\cdot\frac{a}{bb}\cdot\frac{a}{bb}=\frac{a^3}{b^6}\quad\text{eine Potenz vom dritten Grade}$$

§. LXV.

Zusatz. Eben so ist vom $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ eine Potenz vom zweyten Grade.

$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$ eine Potenz vom dritten Grade.

Aus dem folget, daß die Potenzen in Brüchen um so kleiner werden, als höher der Grad ist, auf dem man sie bringet.

§. LXVI.

Aufgabe. Eine Potenz auf jeden gegebenen Grade zu erhöhen.

Auflösung. I. Fall. Ist die Potenz, welche man auf einen gegebnen Grad erhöhen soll, vom ersten Grade, setzet man über dieselbe blos den Echsponenten oder Grad darüber, zu welchen sie soll erhöhet werden. z. B.

a zum 4ten Grade erhöht ist a^4

x zum $m$ten Grade erhöht ist x^m

$\frac{ab}{cd}$ zum $m$ten Grade erhöht ist $\frac{ab^m}{cd^m}$

II. Fall. Ist sie von einem höhern Grade, multiplizirt man dessen Echsponenten mit dem Grad, zu den man sie erhöhen soll, und schreibet das Produkt über die einfache Größe. z. B.

a^2 zum

a^2 zum 3ten Grade erhöht ist $a^{2 \cdot 3} = a^6$

x^m zum $n$ten Grade erhöht ist x^{mn}

$\frac{ab^m}{cd^m}$ zum $n$ten Grade erhöht ist $\frac{ab^{mn}}{cd^{mn}}$

III. Fall. Sind Koeffizienten dabey, verfährt man in allen, wie in beyden vorhergehenden Fällen, nur daß man die Koeffizienten durch wirkliches Multipliziren zum nämlichen Grade erhöht. z. B.

$\frac{4}{5}\, a$ zum zweyten Grade erhöht ist $\frac{16}{25} a^2$

$\frac{2}{3}\, \frac{ab}{cd}$ zum dritten Grade erhöht ist $\frac{8}{27} \frac{ab^3}{cd^3}$

$\frac{1}{4}\, x^2$ zum zweyten Grade erhöht ist $\frac{1}{16} x^4$

Beweis. Was den ersten Fall anbelangt, ist es ohnehin klar, daß man nur den Grad über die Potenz schreiben darf, weil der Echsponent oder Grad die Menge aller Faktorn anzeigt, oder wie vielmal die gegebene Größe mit sich selbst multiplizirt sey (nach §. 63.)

Der zweyte Fall ist eben so klar. Den z. B.

$a^2 = aa$ zum dritten Grad erhöhn,

ist nichts anders, als

$aa \cdot aa \cdot aa = aaaaaa$ (nach §. 32.)

Nun ist aber dieß

$= a^{2 \cdot 3} = a^6$ (nach §. 63.)

folgsam erhöht man eine Potenz auf seinen Grad, wenn man den Echsponenten der gegebnen Größe mit dem gegebnen Grade multiplizirt.

Daß nämlich im dritten Falle die Koeffizienten zum nämlichem Grade seyn erhöhet worden, erhellet (aus §. 64.)

§. LXVII.

Aufgabe. Wenn die Potenzen ähnlich sind, das ist, wenn sie einerley Buchstaben und Grade haben, addirt man nur die Koeffizienten (nach §. 16. und 25.) z. B.

zu $4a^3$
addirt $2a^3$

ist $4a^3 + 2a^3 = 6a^3$.

Sind sie nicht ähnlich, hängt man sie nur durch ihre Zeichen zusammen (nach §. 20.) z. B.

zu $3a^2$
addirt b^3

setzet man $3a^2 + b^3$

§. LXVIII.

Aufgabe. Potenzen zu subtrahiren.

Auflösung. Man subtrahirt dieselbe völlig (nach §. 26.) z. B.

vom $4a^3$
subtrahirt b^3

giebt die Differenz $4a^3 - b^3$.

vom $5a^3$
subtrahirt $2a^3$

giebt $5a^3 - 2a^3 = 3a^3$

§. LXIX.

Aufgabe. Potenzen zu multipliciren.

Auflösung. Wenn die Potenzen gleichnämig sind, das ist, wenn sie einerley Buchstaben haben, wird die Summe der Echsponenten über die gleichnämige Potenz geschrieben. Oder, Wenn sie nicht gleichnämig sind, werden sie blos (nach §. 29.) zusammengesezt. z. B.

$$a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$$

$$a^3 \cdot b^2 = a^3 b^2$$

Beweis. Denn, weil

$$a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = aaaaa = a^5$$

folgsam $a^2\, a^3 = a^{2+3} = a^5$

Der andere Fall hat seine Richtigkeit (durch §. 29.)

§. LXX.

Aufgabe. Eine Potenz durch die andere zu dividiren.

Auflösung. Man subtrahirt den Echsponenten des Divisoris von dem Echsponenten des Dividendi, (wenn die Potenzen gleichnämig sind) die Differenz ist der Echsponent des Quozienten. (Sind sie nicht gleichnämig) zeigt man die Division blos (nach §. 40.) an. z. B.

a^5	dividirt durch	a^3	giebt zum Quozienten	$a^{5-3} = a^2$
$\frac{4}{9}\, x^4$		$\frac{2}{3}\, x^2$		$\frac{2}{3} x^{4-2} = \frac{2}{3} x^2$
$3\, a^3$		b^2		$\frac{3a^3}{b^2}$ oder $3a^3 : b^2$

Beweis.

Beweis. Denn

$$a^5 : a^3 = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2 \text{ (nach §. 29.)}$$

Da nun $a^2 = a^{5-3}$,

folgsam erlangt man den Echsponenten des Quozienten, wenn man von dem Echsponenten des Difidendi den Echsponenten des Difisoris subtrahirt (da die Potenzen gleichnámig sind) bey ungleichnámigen, muß die Difision blos angezeigt werden (nach §. 40.)

§. LXXI.

Zusatz. Wenn man dahero allgemein die Echsponenten m und n nennet, daß man darunter (was man für einen Echsponenten will) verstehen könne, und x statt a setzet: so ist

$$x^m : x^n = x^{m-n}$$

und

$$x^m : x^m = x^{m-m} = x^0$$

§. LXXII.

Zusatz. Weil nun

$$x^m : x^m = x^{m-m} = x^0$$

und wiederum

$$x^m : x^m = 1,$$

also ist

$$x^0 = 1,$$

folgsam, da man unter x jede Größe verstehen kann, ist jede Größe gleich 1, wenn sie zu ihren Echsponenten 0 hat.

§. LXXIII.

Zusatz. Setzet man

$$m = 2,\ n = 5$$

ist

$$x^m : x^n = x^2 : x^5,\ x^{m-n} = x^{2-5} = x^{0-3}.$$

Der Echsponent des Quozienten also wird negatif, wenn der Echsponent des Difisoris größer, als der Echsponent des Difidendi ist.

§. LXXIV.

Zusatz. Weil $x^0 = 1$ ist,

so ist

$$\frac{1}{x} = x^0 : x^1 = x^{0-1}$$

$$\frac{1}{3}x = x^0 : x^3 = x^{0-3},$$

folgsam ist eine Potenz, die einen negatifen Echsponenten hat, einem Bruche gleich, dessen Zähler 1 ist, der Nenner aber der Echsponent des Difisoris als eine positife Größe, oder in einem allgemeinen Ausdrucke

$$x^{0-n} = \frac{1}{x^n}$$

§. LXXV.

Zusatz. Indem die Potenzen von negatifen Echsponenten als Brüche nur der Größe nach von ihren Ganzen unterschieden sind, lassen sie sich auf gleiche Weise multipliziren, und zu jeden verlangten Grade erhöhen: z. B. Wenn man die Potenz

x^{-n}

$$x^{-n} = x^{\frac{1}{n}}$$

multipliziren soll, mit x^m

ist das Produkt x^{-n+m}.

Oder, so man solche zum Grade erhöhen will, die Potenz $x^{-nr} = x^{\frac{1}{nr}}$

Von den Wurzeln der Potenzen.

§. LXXVI.

Willkürlicher Satz. Damit man erkennen könne, ob und was für eine Wurzel man aus einer Potenz ziehen soll, hat man angenommen, den Potenzen, aus welchen man eine Wurzel zu ziehen verlangt, dieses Zeichen ($\sqrt{}$), das man das Wurzelzeichen nennt, vorzusetzen, und in dessen Oeffnung (wenn man nicht die Quadratwurzel verlangt) allezeit den Echsponenten der Wurzel zu schreiben. z. B.

Wenn man vom 30 die Quadratwurzel verlangt, schreibt man $\sqrt{30}$,

will man vom 80 die Kubikwurzel,

$$\sqrt[3]{80}.$$

Oder allgemein, wenn man von der Potenz a^n die Wurzel m verlangt,

$$\sqrt[m]{a^n}$$

§. LXXVII.

Aufgabe. Die Wurzel aus einer gegebenen Potenz auszuziehen.

Auf-

Auflösung. Man dividirt den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem Exponenten der Wurzel. z. B.

mit 2, 3, 4,

wenn der Exponent der Wurzel

2, 3, 4 ist.

Der Quozient ist der Exponent der verlangten Wurzel aus der gegebenen Potenz. z. B.

Wenn man aus $\sqrt[3]{a^6}$, das ist, aus a^6 die Kubikwurzel suchet, setzet man

$$a^{6:3} = a^2$$

Also findet man, daß a^2 die Kubikwurzel vom a^6 sey.

Beweis. Denn,

$$\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{a^{3\cdot 2}}$$

Wie nun a^6 aus $a^{3\cdot 2}$ entstehet (nach §. 66.): so muß wiederum verkehrt die Wurzel a^2 herauskommen, wenn man a^6 durch 3 dividirt, oder

$$a^{6:3} = a^2 \text{ sey.}$$

§. LXXVIII.

Zusatz. Allgemein ist dahero

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}, \quad \sqrt[m]{x^n\, y^r} = x^{\frac{n}{m}}\, y^{\frac{r}{m}}.$$

§. LXXIX.

Zusatz. Aus dem folgt also, daß es Potenzen gebe, deren Exponenten positive oder negative Brüche sind. z. B.

Wenn

Wenn man setzet

$$m = 6, \; n = 2$$

ist

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{1}{3}}$$

und

$$\sqrt[6]{x^{-2}} = x^{-\frac{2}{6}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

Von den Irrationalwurzeln und unmöglichen Größen.

§. LXXX.

Erklärung. Die Wurzeln, die sich niemal aus einer Größe vollkommen oder ohne Rest ausziehen lassen, werden Irrationalwurzeln genennt. z. B.

$$\sqrt{2}, \; \sqrt{5}, \; \sqrt{ab}$$

sind irrationale Quadratwurzeln, weil sich weder aus 2, noch aus 5 oder ab die Quadratwurzel genau ausziehen läßt, eben so sind irrationale Kubikwurzeln.

$$\sqrt[3]{9}, \; \sqrt[3]{20}$$

§. LXXXI.

Zusatz. Man kann aber irrationale Wurzeln zum theil von ihrer Irrationalität befreyen, und zu einem einfachern Ausdruck bringen, wenn man (nach §. 61.) einen Divisorem als eine Potenz von dem Grade findet, der in der Oeffnung des Wurzelzeichen stehet, und durch den sich die Irrationalwurzel ohne Rest dividi-

ren

ren läßt, die Wurzel des Divisors vor, den Quozienten aber hinter das Wurzelzeichen setzet. z. B.

Man findet, daß sich in $\sqrt[3]{24}$, 24 durch die Kubikzahl 8 ohne Rest dividiren läßt, oder daß

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3}$$

auch daß von 8 die Kubikwurzel genau 2 sey.

Weil also $2 = \sqrt[3]{8}$, kann man $\sqrt[3]{8}$ von $\sqrt[3]{8 \cdot 3}$ befreyen, und statt dessen die Rationalwurzel 2 setzen; so ist

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24},$$

eben so ist

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{16a} = 4\sqrt{a}$$

$$\sqrt[3]{27b} = 3\sqrt[3]{b}.$$

§. LXXXII.

Zusatz. Wenn man also eine Rationalwurzel, welche vor dem Wurzelzeichen stehet, wiederum als einen Faktor hinter das Wurzelzeichen bringen will, muß man dieselbe wieder zu dem nämlichen Grade erhöhen, welcher in der Oeffnung des Wurzelzeichens angemerkt ist.

z. B. Man will bey $2\sqrt[3]{3}$, 2 hinter das Wurzelzeichen bringen, kubirt man 2, und setzet

$$\sqrt[3]{8 \cdot 3}.$$

§. LXXXIII.

Erklärung. Irrationale Wurzeln werden komensurabel genennt, wenn sie sich verhalten wie ihre Größen vor den Wurzelzeichen; welches man aus dem erkennet, wenn sie hinter ihren Wurzelzeichen einerley oder eine gemeinschaftliche Größe haben. z. B.

$$6\sqrt{2} \text{ und } 4\sqrt{2},$$

welche sich wegen der gemeinschaftlichen Größe 2 verhalten, wie

$$6:4 \text{ oder } 3:2.$$

§. LXXXIV.

Aufgabe. Verschiedene irrationale Wurzeln unter einerley Benennung zu bringen. z. B.

$$\sqrt[m]{x^n},\ \sqrt[r]{y^s}$$

oder welches (nach §. 78.) eines ist

$$x^{\frac{n}{m}},\ y^{\frac{s}{r}}$$

Auflösung. Man bringt die Echsponenten

$$\frac{n}{m} \quad \frac{s}{r}$$

als Brüche unter einerley Benennung (nach §. 44.) und setzet statt deren die unter einerley Benennung gebrachte Brüche

$$\frac{nr}{mr} \quad \frac{ms}{mr}$$

so ist

$$x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{nr}{mr}} = \sqrt[mr]{x^{nr}},\ y^{\frac{s}{r}} = y^{\frac{ms}{mr}} = \sqrt[mr]{y^{ms}}$$

§. LXXXV.

Anmerkung. Es ist zu erinnern, daß man unter dem Echsponenten von der Größe hinter

dem

dem Wurzelzeichen allzeit (1) verstehe, wenn kein anderer Echsponent zugegen ist. z. B.

$$\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

§. LXXXVI.

Aufgabe. Irrationale Wurzeln zu addiren oder zu subtrahiren.

Auflösung. Wenn die irrationale Wurzeln kommensurabel sind, werden die Größen vor dem Wurzelzeichen addirt oder subtrahirt, und hinter derer Summe oder Differenz das Wurzelzeichen mit seinem Grade und der gemeinschaftlichen Größe gesetzet. z. B.

$$3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}.$$

$$5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

Sind sie nicht kommensurabel, geschieht die Addition und Subtraktion blos durch die Zeichen + und —. z. B.

$2\sqrt[3]{4}$ addirt zu $2\sqrt{5} = 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt{5}.$

$2\sqrt{5}$ subtrahirt von $2\sqrt{4} = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{4}.$

§. LXXXVII.

Aufgabe. Irrationale Wurzeln zu multipliziren oder zu dividiren.

Auflösung. Man bringet die irrationale Wurzeln unter einerley Benennung, multiplizirt oder dividirt miteinander die Größen hinter dem Wurzelzeichen, und setzet derer Produkt oder Quozienten wieder hinter das nämliche Wurzelzeichen.

Eben so macht mans auch, wenn vor dem Wurzelzeichen Größen stehen, nur daß man derer Produkt oder Quozienten auch vor das Wurzelzeichen setzet, so ist die Multiplikation oder Division vollbracht. z. B.

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$$

oder $$\sqrt[mr]{x^{nr}}\cdot\sqrt[mr]{y^{ns}}=\sqrt[mr]{x^{nr}y^{ns}}$$

$$4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}=8\sqrt{6}$$

oder $$x\sqrt[mr]{x^{nr}}\cdot y\sqrt[mr]{y^{ns}}=xy\sqrt[mr]{x^{rn}y^{ns}}$$

$$\sqrt{6}:\sqrt{2}=\sqrt{3}$$

oder $$\sqrt[mr]{x^{nr}\,y^{ns}}:\sqrt[mr]{y^{ns}}=\sqrt[mr]{x^{nr}}$$

$$8\sqrt{6}:4\sqrt{3}=2\sqrt{2}.$$

$$xy\sqrt[mr]{x^{mr}y^{ns}}:y\sqrt[mr]{y^{ns}}=x\sqrt[mr]{x^{mr}}.$$

§. LXXXVIII.

Erklärung. Unmögliche Wurzeln werden diejenige genennt, die niemals entstehen können.

§. LXXXIX.

Grundsatz. Die nämliche Größe kann niemals zugleich positif und nicht positif, oder positif und negatif seyn.

§. XC.

Zusatz. Folgsam muß eine Wurzel, wenn sie auch noch so oft mit sich selbst multiplizirt wird, als die nämliche Größe immer positif oder negatif bleiben.

§. XCI.

Lehrsatz. Die Wurzeln von negatifen Potenzen, die einen geraden Echsponenten haben, sind ohnmöglich: aber nicht ohnmöglich, wenn sie einen ungeraden Echsponenten haben.

Beweis. Denn, weil es zwischen positifen und negatifen Größen kein Mittel giebt, muß die Wurzel entweder + oder — seyn.
Ist sie +. z. B. $+a$,
so ist

$$a.a=a^2,\ a^2.a=a^3,\ a^3.a=a^4.\ \text{u. s. w.}$$

folgsam können von positifen Potenzen nur positife Wurzeln möglich seyn.
Ist sie —,
so ist

$$-a.-a=a^2,\ a^2.-a=-a^3,\ -a^3.-a=a^4,\ a^4.-a=-a^5$$

folgsam können nur von negatifen Potenzen, die einen ungeraden Echsponenten haben, als

$$-a^3,\ -a^5$$

die Wurzeln möglich seyn.

§. XCII.

Zusatz. Es sind dahero z. B. mögliche Wurzeln

$$\sqrt[3]{-8}=-2,\ \sqrt[3]{-27}=-3,$$

entgegen unmögliche Wurzeln

$$\sqrt{-4},\ \sqrt[4]{-16}.$$

Von den binomischen Wurzeln und ihren Potenzen.

§. XCIII.

Erklärung. Eine jede Wurzel, die aus zween Theilen bestehet, wird eine binomische Wurzel, und das Produkt, welches entstehet, wenn man eine binomische Wurzel ein oder öftermal mit sich selbst multiplizirt (nach §. 63.) die Potenz einer binomischen Wurzel genennt.

§. XCIV.

Zusatz. Man kann aber eine jede Wurzel ansehen, als bestünde sie aus zween Theilen: denn, sie mag noch so groß oder klein seyn, so läßt sie sich allzeit in zween Theile zerfällen. z. B.

$$450 = 400 + 50,\ 7 = 4 + 3,\ \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}.$$

Oder setzet man

$$cd = a, \text{ und } e = b$$

ist

$$c + d + e = a + b$$

§. XCV.

Zusatz. Wenn man also das erste Glied einer binomischen Wurzel a, das zweyte b nennet, kann der Ausdruck $a + b$ alle mögliche Wurzeln und $(a + b)^m$ alle mögliche Potenzen vorstellen.

§. XCVI.

Lehrsatz. Das Quadrat einer binomischen Wurzel hält in sich das Quadrat des ersten und andern

andern Theils, nebst einem Produkte von dem ersten Theil zweymal genommen in dem andern.

Beweis. Denn wenn man die Wurzel

$$a+b$$

einmal mit sich selbst multiplizirt (nach §. 63.) als

$$\begin{array}{c} a+b \\ a+b \\ \hline \end{array}$$

bekömmt man $aa+2a.b+bb$ zu dessen Quadrat: folgsam hält das Quadrat einer binomischen Wurzel in sich das Quadrat des ersten und andern Theils, nämlich aa und bb nebst einem Produkt von dem ersten Theile, zweymal genommen in dem andern: nämlich

$$2a.b=2ab.$$

§. XCVII.

Aufgabe. Aus dem Quadrat von einer binomischen Wurzel, die Quadratwurzel auszuziehen. z. B.

aus $aa-2ax+xx$.

Auflösung. Man saget

vom aa

ist die Wurzel a,

setzet a zum Quozienten, und subtrahirt dessen Quadrat aa von dem Quadrat des ersten Theils,

bleibt zum Rest $-2ax+xx$.

Nach diesem difidirt man in $-2ax$, mit $2a$ oder dem ersten Theil der Wurzel a doppelt genommen, so findet man für den Quozienten, als

den andern Theil der Wurzel

$-x$:

schreibet solches zum Quozienten und Divisorn, multiplizirt $2a-x$ mit x, und subtrahirt das Produkt $2ax-xx$ von dem Rest, so ist die Wurzel ausgezogen.

Beyspiel:

Quadrat	$aa-2ax+xx$	Quozient oder Wurzel $a-x$
Quadrat	$-aa$	
Rest	$-2ax+xx$	
Divisor	$2a$	
Summe des Divisors $2a$ und des Quozienten $-x$	$2a-x$	
multiplizirt mit	$-x$	
Produkt: Subtrahirt:	$2ax-x^2$	
Rest	0	

§. XCVIII.

Lehrsatz. Der Kubus einer binomischen Wurzel $a+b$, hält in sich den Kubum des ersten und andern Theils, ein Produkt von dem Quadrat des ersten Theils dreymal genommen in dem andern, und noch ein Produkt von dem ersten Theil dreymal genommen in das Quadrat des andern.

Beweis.

Beweis. Denn wenn man, um den Kubum davon zu erhalten,

$$a + b$$

zweymal mit sich selbst multiplizirt,

ist

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+2ab+b^2 \text{ das Quadrat} \\ a+b \\ \hline aab+2abb+b^3 \\ a^3+2aab+abb \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \text{ der Kubus,} \end{array}$$

folgsam hält der Kubus einer binomischen Wurzel in sich den Kubum beyder Theile

a^3 und b^3

Ein Produkt von dem Quadrat des ersten Theils dreymal genommen in dem andern

$$3a^2 . b = 3a^2b,$$

und ein Produkt von dem ersten Theil dreymal genommen in das Quadrat des andern,

nämlich

$$3a . b^2 = 3ab^2$$

§. XCIX.

Aufgabe. Aus der Kubikzahl einer binomischen Wurzel die Wurzel auszuziehen. z. B.

aus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Auflösung. Man sagt, vom a^3 ist die Wurzel a (nach §. 63.), setzet die Wurzel a zum Quozienten, und subtrahirt dessen Kubum von der Kubikzahl des ersten Theils, darauf disidirt man mit dem Quadrat des ersten Theils a dreymal genommen, das ist, mit $3a^2$, in das erste Glied des Restes $+3a^2b+3ab^2+b^3$, erlangt man zum Quozienten, als dem andern Theil der Wurzel

$+b$.

Mit dem Quozienten b multiplizirt man den Disisor $3a^2$, und subtrahirt das Produkt $3a^2b$ von dem Rest, bleibt zum neuen Rest $+3ab^2+b^3$.

Man multiplizirt demnach den ersten Theil a mit 3, und $3a$ mit dem Quadrat des andern Theils b^2, subtrahirt das Produkt $3ab^2$ von dem Rest, und endlich den Kubum des letzten Theils b^3, so ist die Wurzel ausgezogen. Beyspiel:

	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	Quozient
Kub.	$-a^3$	$a+b$
Rest	$3a^2b+3ab^2+b^3$	
Disisor	$3a^2$	
Subtr. Prod.	$-3a^2b$	
Rest	$+3ab^2+b^3$	
Produkt	$-3ab^2$	
Rest	$+b^3$	
Kubus	$-b^3$	
Rest	0	

§. C.

Zusatz. Wenn der erste Theil eines Kubi oder Quadrati einen Koeffizienten hat, wird aus demsel-

ben gleichfalls die Kubik oder Quadratwurzel ausgezogen, und mit dem ersten Theil der Wurzel des Koeffizienten, und Kubi oder Quadrati nach vorgehender Aufgabe die Ausziehung fortgesetzt.

§. CI.

Willkürlicher Satz. Wenn man anzeigen will, daß aus einer Potenz, die in einer komplechsen Größe bestehet, die Quadrat- oder Kubikwurzel soll ausgezogen werden, schließt man solche in ein () und setzet in die Oeffnung des Wurzelzeichen den Grad der Wurzel. z. B.

Wenn man anzeigen will, daß die Quadratwurzel soll gezogen werden aus

$$aa - bb,$$

schreibet man

$$\sqrt{(aa - bb)}.$$

Die Kubikwurzel $\sqrt[3]{(aa - bb)}$.

Die Wurzel vom *n*ten Grade

$$\sqrt[n]{(aa - bb)}$$

oder auch (nach §. 79.)

$$\overline{aa - bb}^{\frac{1}{2}}, \quad \overline{aa - bb}^{\frac{1}{3}}, \quad \overline{aa - bb}^{\frac{1}{n}}.$$

§. CII.

Anmerkung. Damit man nicht vielleicht die Glieder von den gebräuchlichsten Potenzen bey Ausziehung der Wurzeln vom neuen berechnen dürfe, sind dieselben bis zur Potenz vom 6ten Grade in Tab. I. am Ende dieses Buchs eingeführt worden.

III. Abtheilung.

Von den einfachen und quadratischen Gleichungen.

§. CIII.

Erklärung.

Eine einfache Gleichung ist eine Gleichung, in welcher keine unbekannte Größe eine Potenz von einem höhern Grade, als vom 1ten ist. z. B.

$$x = b + c,\quad x + y = cd$$

§. CIV.

Erklärung. Die Termini, welche zur Linken des Gleichheitszeichen stehen, werden das erste, die zur Rechten, das zweyte Glied der Gleichung genennt.

§. CV.

Erklärung. Eine algebraische Aufgabe aufzulösen, heißet nichts anders, als vermittels der Gleichungen und gegebnen Bedingnissen aus bekannten Größen den verlangten Werth von jeder unbekannten Größe zu finden.

§. CVI.

Zusatz. Da nun die Gleichungen wegen diesem gemacht werden, damit man durch die bekannten Größen den Werth einer jeden unbekannten insonder-

heit

heit finden könne, muß man die bekannte alle zu einem Gliede, die unbekannte allein zum andern bringen; damit man auf der Gleichheit, welche die unbekannte Größe allein mit den bekannten hat, den Werth zu bestimmen wisse.

§. CVII.

Zusatz. Nachdem also die bekannten Größen mit den unbekannten, oder die unbekannte von verschiedner Art verbunden sind, nachdem müssen sie nach der Gestalt der Verbindung so voneinander befreyet werden, daß ein Glied der Gleichung die unbekannte Größe, das andere die bekannte insonderheit ausmache, welches hauptsächlich durch folgende Verrichtungen geschehen kann.

Von der Transposizion.

§. CVIII.

Erklärung. Die Transposizion ist eine Verrichtung, durch welche so ein, oder mehrere Termini von einem Gliede der Gleichung zu dem andern Gliede gesetzet werden, daß doch die Gleichheit der Glieder noch verbleibe.

§. CIX.

Lehrsatz. Wenn man zu zween gleichen Größen gleiches addirt, oder davon gleiches subtrahirt, kömmt wieder gleiches heraus.

Beweis. Denn man setze

$$a = b \text{ und } c = d,$$

so ist $a + c = b + d$ und $a - c = b - c$.

§. CX.

§. CX.

Zusatz. Wenn man also

zu $x - b - d = g$

addirt $+ b + d = + b + d$

ist $x = g + b + d$ (nach §. 19.)

Oder wenn man

von $y + b + c = d$

subtrahirt $- b - c = - b - c$

ist $y = d - b - c$ (nach §. 28.)

§. CXI.

Zusatz. Will man dahero Theile von einem Gliede zum andern bringen, darf man sie blos in dem Gliede, wo sie stehen, ausstreichen, und mit entgegengesetzten Zeichen hinübersetzen, das ist, mit +, wenn sie — und mit —, wenn sie + gehabt haben. z. B. Wenn man bey

$$y - b + \frac{cd}{e} - g = \frac{aa}{c}$$

y allein haben will, streicht man im ersten Gliede alle andere Terminos aus, und setzet sie mit entgegengesetzten Zeichen zum zweyten Gliede,

so ist

$$y - b + \frac{cd}{e} - g = y = \frac{aa}{c} + b - \frac{cd}{e} + g.$$

§. CXII.

Zusatz. Es kann also jede Gleichung auf o gebracht werden, wenn man ein ganzes Glied mit entgegengesetzten Zeichen zum andern hin-

über-

übersetzet. Weil die Glieder gleich sind, und durch die entgegengesetzte Zeichen sich völlig gegeneinander heben, daß also auf beyden Seiten nur mehr o übrig bleibe (nach §. 19.)

z. B. Wenn $ab - cd = ad - xx$

so ist $ab - cd - ad + xx = 0$,

Oder wenn $yy - aa = bc + dc$,

so ist $aa + bc + dc - yy = 0$.

§. CXIII.

Zusatz. Es sey

$$\begin{array}{rl} ab - cd - ad + xx & = 0, \\ + cd & = cd, \\ \hline \text{folgsam}\quad ab - ad + xx & = cd \text{ (nach §. 109.)} \\ - ab + ad & = - ab + ad, \\ \hline xx & = cd - ab + ad. \end{array}$$

Dahero, wenn eine Gleichung auf o ist gebracht worden, darf man die Terminos, welche man nebst der Erhaltung der Gleichheit wieder auf die andere Seite bringen will, nur ausstreichen, und mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite das Gleichheitszeichen schreiben.

Von der Division.

§. CXIV.

Erklärung. Die Division, wie sie hier genommen wird, ist eine Verrichtung, durch welche die bekannten Größen von den unbekannten, mit

mit der sie durch die Multiplikation verbunden sind, so befreyet werden, daß die Gleichheit beyder Glieder dennoch bleibet.

§. CXV.

Lehrsatz. Wenn man Gleiches durch Gleiches multiplizirt, oder dividirt, sind die Produkte oder Quozienten wieder einander gleich.

Beweis. Denn man setze

$$a = b,$$

so ist nothwendig wieder

$$ac = bc \text{ und } \frac{a}{c} = \frac{b}{c}.$$

§. CXVI.

Zusatz. Wenn man also bekannte Größen von den unbekannten, mit denen sie durch die Multiplikation verbunden sind, befreyen will, darf man nur durch die damit verbundne bekannte Größe alle Terminos von beyden Gliedern dividiren. z. B. Es sey

$$ax - bc = ac + bd$$

so ist

$$\frac{ax}{a} - \frac{bc}{a} = \frac{ac}{a} + \frac{bd}{a} \text{ (nach §. 115.)}$$

oder

$$x - \frac{bc}{a} = c + \frac{bd}{a} \text{ (nach §§. 39. u. 40.)}$$

§. CXVII.

Anmerkung. Da die nämliche unbekannte Größe

in mehrern Terminis eines Gliedes mit bekannten Größen durch die Multiplikation verbunden ist, siehet man (nach §. 41.) die unbekannte Größe als einen gemeinschaftlichen Faktor an, die bekannte aber, als den andern, und dividirt mit dem Faktor der bekannten Größe in alle übrige Terminos, die das gemeinschaftliche unbekannte Glied zu keinem Faktor haben. z. B.

Es sey $ax + bx - cx + dd = abc$

so ist $(ax + bx - cx) : (a + b - c) = x$.

folgsam $x + \frac{dd}{a+b-c} = \frac{abc}{a+b-c}$ (nach §. 115.)

oder (nach §§. 45. u. m.)

$$x = \frac{abc - dd}{a+b-c}$$

Von der Multiplikation.

§. CXVIII.

Erklärung. Durch die Multiplikation verstehet man hier eine Verrichtung, durch welche die bekannte Größen von den unbekannten, mit den sie durch die Division verbunden sind, können befreyet werden, ohne daß die Gleichheit der Glieder gehoben wird.

§. CXIX.

Lehrsatz. Wenn in einer Gleichung ein Terminus ein Bruch ist, wird derselbe gehoben, wenn man mit dessen Nenner alle Ter-

minos von beyden Gliedern multiplizirt, und hat sie mehrere Terminos als Brüche, geschieht dieß, wenn man mit dem Produkte aller Nenner alle Terminos von beyden Gliedern multiplizirt.

Beweis. Denn, wenn man mit dem nämlichen Nenner oder dem nämlichen Produkte alle Terminos, das ist, beyde Glieder multiplizirt, müssen fürs erste beyde Glieder gleich seyn (nach §. 115.) und weil demnach ein jeder Zähler der Nenner oder das Produkt aus allen Nennern ist, muß sich nothwendig jeder Nenner heben.

§. CXX.

Zusatz. Will man dahero z. B.

vom
$$\frac{x}{b} + c = a - d$$

den Bruch wegbringen, darf man nur mit b alle Terminos multipliziren.

giebt
$$\frac{bx}{b} + bc = ab - bd,$$

oder weil
$$\frac{bx}{b} = x,$$

$$x + bc = ab - bd,$$

oder will man von

$$\frac{x}{d} + \frac{x}{c} + e = bb - \frac{g}{h}$$

die Brüche wegschaffen, multiplizirt man mit dem Produkt der Nenner cdh alle Terminos,

giebt

giebt

$$\frac{cdhx}{d}+\frac{cdhx}{c}+cdeh=bbcdh-\frac{cdhg}{h}.$$

Da aber

$$\frac{cdhx}{d}=chx,\ \frac{cdhx}{c}=dhx,\ \frac{cdhg}{h}=cdg,$$

so kann man diesen gleichen Werth ohne Bruch dafür annehmen, und die Gleichung wird sodenn

seyn $chx+dhx+cdeh=bbcdh-cdg.$

Von der Substituzion.

§. CXXI.

Erklärung. Die Substituzion ist eine Verrichtung, durch welche eine oder mehrere unbekannte Größen, die in den Gleichungen von der nämlichen Aufgabe vorkommen, vermittels der Ersetzung eines andern gleichen Werthes weggebracht werden.

§. CXXII.

Lehrsatz. Wenn zwo Gleichungen sind, welche zwo verschiedne unbekannte Größen haben, kann eine weggebracht werden, sobald man von einer Gleichung statt der unbekannten Größe, die man weghaben will, dessen gleichgültigen Werth in die andere Gleichung setzet.

Beweis. Denn z. B. es sey

$$ax+y=b \text{ und } by+x=a$$

so ist $x=a-by$ (nach §. 111.)

$ax=a.(a-by)=aa-aby)$ (nach §. 115.)

folgsam

$$ax+y=aa-aby+y=b \text{ (nach §. 109.)}$$

§. CXXIII.

Anmerkung. Will man aus der Gleichung y haben, darf man nur den gleichen Werth vom y in die andere Gleichung setzen. z. B.

Es sey wieder

$$ax+y=b \text{ und } by+x=a$$

so ist

$$by=a-x$$

$$y=\frac{a-x}{b}$$

folgsam $ax+y=ax+\frac{a-x}{b}=b$

§. CXXIV.

Zusatz. Auf gleiche Weise können durch die Substituzion mehr unbekannte Größen weggeschafft werden, wenn so viele Gleichungen als unbekannte Größen zugegen sind. z. B.

Es seye

$$x+y+z=a,\ x+y-z=b,\ x-y+z=c.$$

Denn man kann erstlich x von den zween andern Gleichungen wegschaffen, wenn man den gleichgültigen Werth vom x aus der ersten Gleichung in den beyden andern substituirt.

Als

Als $x+z+y=a$

folgsam $x=a-z-y$,

substituirt für x

$a-z-y$,

ist

$x+y-z=a-y-z+y-z=a-2z=b$ (nach

$x-y+z=a-y-z-y+z=a-2y=c$. § 25)

Man hat dahero schon zwo Gleichungen, nämlich

$a-2z=b$, und $a-2y=c$,

in den x wirklich verschwunden ist, und von den sich die unbekannte Größe bey jeder bestimmen läßt: denn,

weil $a-2z=b$ und $a-2y=c$

so ist $z=\frac{b-a}{2}$, $y=\frac{c-a}{2}$

setzet man nun in der ersten Gleichung statt y und z den gleichen und bekannten Werth,

ist

$$x+y+z=x+\frac{c-a}{2}+\frac{b-a}{2}=a.$$

§. CXXV.

Anmerkung. Man siehet aber wieder, daß wenn man zulezt y oder z haben will, man nur anfänglich statt dem gleichen Werthe vom x den gleichen Werth vom y oder z in die beyde andere Gleichungen setzen darf.

Von den quadratischen, sowohl von den reinen als unreinen Gleichungen.

§. CXXVI.

Erklärung. Eine quadratische Gleichung ist, in welcher die höchste Potenz von der unbekannten Größe ein Quadrat ist. Sie ist rein, wenn diese Potenz allein als ein Quadrat vorkömmt. z. B.

$$x^2 = a, \quad y^2 = a + b,$$

hingegen unrein, wenn noch eine niedrige Potenz von der unbekannten Größe zugegen ist. z. B.

$$x^2 + ax = b \text{ oder } y^2 - ay = ab.$$

§. CXXVII.

Willkürlicher Satz. Man hat angenommen, den Größen, die + oder − seyn können, beyde Zeichen übereinander vorzusetzen, oder mit dem Zeichen ($\pm$) zu bemerken.

§. CXXVIII.

Zusatz. Weil in einer quadratischen Gleichung, als

$$x^2 = a \text{ oder } y^2 = a + b, \; x^2 = x \cdot x \text{ oder } -x \cdot -x,$$

$$y^2 = y \cdot y \text{ oder } -y \cdot -y$$

(nach §. 91.) seyn kann, kann

$$x = \pm \sqrt{a}, \quad y = \pm \sqrt{(a+b)}$$

(nach §. 76.) seyn.

§. CXXIX.

§. CXXIX.

Lehrsatz. Eine jede unreine quadratische Gleichung läßt sich zu einer einfachen auflösen, wenn man aus dem Gliede, wo die unbekannte Potenz ist, ein vollkommenes Quadrat von einer binomischen Wurzel machet. Das ist: wenn man mit der Quadratwurzel von der höchsten Potenz der unbekannten Größe doppelt genommen, in den Terminum dividirt, in dem die niedere Potenz der unbekannten Größe ist, und das Quadrat des herauskommenden Quozienten zu beyden Gliedern der Gleichung addirt.

Beweis. Denn es sey

$$x^2 \pm ax = b$$

weil x^2 das Quadrat vom x ist: so muß $\pm ax$ das Produkt vom ersten Theil 2mal genommen, in dem andern seyn (nach §. 96.)

folgsam $\frac{ax}{2x} = \frac{1}{2}a$ der Quozient, als der andere Theil der Wurzel.

Da aber das Quadrat einer binomischen Wurzel nebst dem Quadrat des ersten Theils und dem Produkt vom ersten Theil 2mal genommen in dem andern, auch das Quadrat des andern Theils in sich hält: erhält man durch beyderseitige Addition desselben ein vollständiges Quadrat von einer binomischen Wurzel, und also durch dessen Ausziehung eine einfache Gleichung. z. B.

Wenn $x^2+ax=b$ oder $x^2-ax=b$,

ist $\sqrt{x^2}=x$ $\quad -\frac{ax}{2x}=-\frac{1}{2}a$

$$\frac{ax}{2x}=\frac{1}{2}a$$

und also

zu $x^2+ax=b$

addirt $\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2$,

$$x^2+ax+\frac{1}{4}aa=b+\frac{1}{4}a^2,$$

$x^2-ax=b$

addirt: $+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2$

$$x^2-ax+\frac{1}{4}a^2=b+\frac{1}{4}a^2$$

folgsam

(nach §. 97. und 101.)

$$x+\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}a^2)},\ x-\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}a^2)}$$

(nach §. 111.)

$$x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}a^2)}\ x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}a^2)}$$

§. CXXX.

Zusatz. Wenn der Koeffizient der nächst niedern unbekannten Potenz, 1, ist, addirt man beyderseits $\frac{1}{4}$, weil vom 1 die Hälfte $\frac{1}{2}$, und dessen Quadrat $\frac{1}{4}$ ist. z. B.

Es sey $x^2+x=a$

so ist $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ addirt.

$$x^2+x+\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4}$$

$\sqrt{}$ echstrah.

$$x+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{(a+\frac{1}{4})}$$

§. CXXXI.

§. CXXXI.

Zusatz. Ist der Koeffizient von der niedern unbekannten Potenz ein Bruch, so verfährt man wieder nach vorgehender Regel, und addirt beyderseits das Quadrat von der Hälfte des Bruches. z. B.

Es seye

$$x^2+\frac{1}{2}x=c,$$

so ist

weil vom $\frac{1}{4}$ das Quadrat $\frac{1}{16}$

$$x^2+\frac{1}{2}x=c$$

$$\frac{1}{16}=\frac{1}{16} \text{ addirt.}$$

$$x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=c+\frac{1}{16}$$

$\sqrt{}$ echstrah.

$$x+\frac{1}{4}=\pm\sqrt{(c+\frac{1}{16})}$$

$$x=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{(c+\frac{1}{16})}$$

§. CXXXII.

Anmerkung. Die quadratischen Gleichungen darf man sich wohl bekannt machen, absonderlich die unreinen, denn sie kommen immer vor, und sind von einem besondern Nutzen.

IV. Abtheilung.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. CXXXIII.

Erklärung.

Die Vergleichung zwoer Zahlen oder ähnlichen Größen wird ein Verhältniß genennt: und zwar eine arithmetische, wenn die Vergleichung durch die Subtraktion, eine geometrische, wenn sie durch die Disision geschiehet. z. B.

$$6-4=2 \quad \text{und} \quad 5-3=2$$

sind arithmetische Verhältnisse, weil man durch die Subtraktion gesucht hat, um wie viel eine Zahl größer, als die andere sey.

$$3:6=2, \quad 4:8=2$$

sind geometrische Verhältnisse, weil man durch die Disision gesucht hat, wie oft die kleinere Zahl in der größern enthalten sey.

§. CXXXIV.

Erklärung. Die arithmetische Verhältnisse, die einerley Differenz haben, werden gleiche arithmetische Verhältnisse genennt. z. B.

$$6-4 \quad \text{und} \quad 5-3,$$

weil beyde zu ihrer Differenz 2 haben.

§. CXXXV.

Erklärung. Geometrische Verhältnisse werden gleich genennt, wenn sie einerley Echsponenten haben. z. B.

6 : 24 und 5 : 20

sind gleiche geometrische Verhältnisse, weil beyderseits der Echsponent 4 ist.

§. CXXXVI.

Zusatz. Die Gleichheit der arithmetischen oder geometrischen Verhältnisse entstehet aus der Gleichheit ihrer Differenzen oder Echsponenten.

§. CXXXVII.

Erklärung. Die zwo Größen, die man in einer Verhältniß gegeneinander vergleichet, heißet man die zwey Glieder der Verhältniß, und zwar das erste Glied die Größe, die zur Linken, das zweyte, die zur Rechten stehet.

§. CXXXVIII.

Anmerkung. Es kömmt aber nicht darauf an, ob die größere oder kleinere Größe das erste Glied sey.

§. CXXXIX.

Lehrsatz. Wenn in einer arithmetischen Verhältniß das erste Glied kleiner als das zweyte ist, so ist das zweyte gleich dem ersten und der Differenz.

Beweis. Denn es sey z. B. die Verhältniß wie a zu b, b das größere Glied, d die Differenz,

so ist $b - a = d$,

folgsam $b = a + d$ (nach §. 111.)

§. CXL.

§. CXL.

Lehrsatz. Wenn in einer arithmetischen Verhältniß das erste Glied größer als das zweyte ist, so ist das zweyte dem ersten weniger der Differenz gleich.

Beweis. Denn, weil also

$$a - b = d,$$

so ist $$a = b + d,$$

und folgsam $$b = a - d.$$

§. CXLI.

Zusatz. Wenn also das erste Glied a oder b ist, kann das zweyte $a \underline{+} d$ oder $b \underline{+} d$ seyn (nach §. 127.)

§. CXLII.

Lehrsatz. In einer geometrischen Verhältniß ist das größere Glied gleich dem kleinern, multiplizirt mit dem Echsponenten der Verhältniß, und das kleinere gleich dem größern durch den Echsponenten difidirt.

Beweis. Denn es sey z. B. die Verhältniß $a : b$ und a im b, m mal enthalten, oder $\frac{b}{a} = m$,

so ist $$b = am \text{ (nach §. 119.)}$$

$$a = \frac{b}{m} \text{ (nach §. 116.)}$$

Von den arithmetischen Proporzionen.

§. CXLIII.

Erklärung. Eine arithmetische Proporzion ist eine Gleichheit zwoer arithmetischer Verhält-

hältnissen. Sie wird kontinuirlich oder stetig genennt, wenn das zweyte und dritte Glied der Proporzion gleich sind. z. B.

$$8 - 5 = 5 - 2,$$

diskret aber, wenn sie nicht gleich sind. z. B.

$$8 - 5 = 9 - 6.$$

§. CXLIV.

Zusatz. Wenn man also allgemein, das erste Glied von der ersten Verhältniß a, von der zweyten b, die gemeinschaftliche Differenz d setzet,

so ist (nach §. 141.)

$$a - a \pm d = b - b \pm d$$

ein allgemeiner Ausdruck für arithmetische diskrete Proporzionen.

§. CXLV.

Zusatz. Setzet man das zweyte Glied gleich dem dritten, und a wieder das erste Glied,

ist $a - a \pm d = a \pm d - a \pm 2d$

ein allgemeiner Ausdruck für arithmetische kontinuirliche Proporzionen.

Lehrsatz. In einer arithmetischen diskreten Proporzion ist die Summe der zwey äußern Glieder gleich der Summe der zwey mittlern.

Beweis. Denn, wenn man von

$$a - a \pm d = b - b \pm d$$

die zwey äußere Glieder a und $b \pm d$ addirt,

ist die Summe

$$a + b \pm d.$$

Addirt

Addirt man die zwey mittlere $a \pm d$ und b,

ist die Summe gleichfalls

$$a + b \pm d.$$

§. CXLVII.

Zusatz. Man kann also das vierte arithmetische Proporzionalglied finden, wenn man von der Summe der beyden mittlern Glieder das erste Glied abzieht.

§. CXLVIII.

Lehrsatz. In einer kontinuirlichen arithmetischen Proporzion ist die halbe Summe der äußern Glieder gleich einem mittlern.

Beweis. Denn, wenn man von

$$a - a \pm d = a \pm d - a \pm 2d$$

die zwey äußern Glieder a und $a \pm 2d$ addirt,

ist derer Summe

$$2a \pm 2d,$$

folgsam die halbe Summe

$$\frac{2a \pm 2d}{2} = a \pm d.$$

§. CXLIX.

Zusatz. Man kann dahero das mittlere arithmetische Proporzionalglied finden, wenn man die zwey äußere Glieder addirt, und derer Summe mit 2 difidirt.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. CL.

Erklärung. Wenn eine Menge Zahlen so fortgehet, daß von der ersten zur linken Hand angefangen, die nachkommende Zahlen immer in der nämlichen arithmetischen Verhältniß kleiner oder größer werden, wird eine solche Reihe der Zahlen eine arithmetische Progression genennt: und zwar eine zunehmende, wenn die nachkommende Zahlen oder Glieder immer in der nämlichen Verhältniß größer werden, als:

3, 5, 7, 9, 11, 13, u. s. w.

eine abnehmende, wenn sie kleiner werden, als:

9, 8, 7, 6, 5, u. s. w.

§. CLI.

Zusatz. Wenn man also das erste Glied a, die Differenz d setzet, so ist

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$ u. s. w.

ein allgemeiner Ausdruck für zunehmende arithmetische Progressionen (nach §§. 139. und 150.)

Entgegen

$a, a-d, a-2d, a-3d, a-4d$ u. s. w.

für abnehmende (nach §. 140.)

und folgsam für zu- und abnehmende arithmetische Progressionen

$a, a\pm d, a\pm 2d, a\pm 3d, a\pm 4d$ u. s. w.

(nach §. 141.)

§. CLII.

§. CLII.

Lehrsatz. In einer arithmetischen Progression ist die Summe der äußersten, und von den äußersten gleich weit abstehenden Gliedern allzeit einander gleich.

Beweis. Denn es sey die Anzahl der Glieder

	1	2	3	4	5	6
Progr.	a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$
				$a+2d$	$a+d$	a
				$2a+5d$,	$2a+5d$,	$2a+5d$

addirt man das erste und sechste, das zweyte und fünfte, das dritte und vierte, werden alle drey Summen einander gleich seyn.

§. CLIII.

Zusatz. Da bey einer arithmetischen Progression von einer geraden Anzahl der Glieder durch die Addition der äußerst, und von den äußerst gleichweit abstehenden Glieder halb so viel Paargleiche Summen herauskommen, als Glieder zugegen sind, muß die Summe aller Glieder so groß seyn, als die Summe vom ersten und letzten Gliede, multiplizirt mit der halben Anzahl Glieder.

§. CLIV.

Zusatz. Man darf dahero nur die Summe vom erst und lezten Gliede mit der halben Anzahl der Glieder multipliziren, wenn man die Summe von einer ganzen Progression haben will, die eine gerade Anzahl der Glieder hat.

§. CLV.

Lehrsatz. In einer arithmetischen Progression von einer ungeraden Anzahl der Glieder ist die Summe aller Glieder gleich der halben Summe des ersten und letzten Gliedes multiplizirt mit der Anzahl der Glieder.

Beweis. Denn es sey die Anzahl der Glieder

$$\begin{array}{lccccc} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ \text{Progr.} & a, & a \pm d, & a \pm 2d, & a \pm 3d, & a \pm 4d, \end{array}$$

so ist dessen Summe $a \pm 2d,\ 2a \pm 4d,\ 2a \pm 4d$
(nach §. 152.)
indem man nämlich das erste und fünfte, das zweyte und vierte, und endlich das mittlere oder dritte zusamm addirt. Da aber

$a \pm 2d,\ 2a \pm 4d,\ 2a \pm 4d = 5a \pm 10d$, und

die halbe Summe der zween äußern Glieder

$$\frac{2a \pm 4d}{2} = a \pm 2d$$ ist. Also auch

$$5 . (a \pm 2d) = 5a \pm 10d,$$

folgsam ist in einer arithmetischen Progression von einer ungeraden Anzahl der Glieder die Summe aller Glieder gleich der halben Summe der äußersten multiplizirt mit der Anzahl der Glieder.

§. CLVI.

Zusatz. Mithin, wenn man die Summe aller Glieder von einer arithmetischen Progression finden will, darf man nur das erste und lezte Glied addiren, und die Hälfte davon mit der ganzen Anzahl der Glieder multipliziren.

§. CLVII.

Zusatz. Da die Differenz des
zweyten Glieds
$$d = (2 - 1) d,$$
des dritten
$$2d = (3 - 1) . d,$$
des vierten
$$3d = (4 - 1) . d,$$ u.s.w. (nach §. 151.)

folgsam jedesmal die Anzahl der Differenzen um eines kleiner, als die Anzahl der Glieder ist. Also ist von dem lezten oder $n$ten Gliede

die Anzahl der Differenzen
$$\pm (n - 1) . d.$$
und das letzte Glied
$$a \pm (n - 1.) . d.$$
Die Summe aller Glieder
$$(2a \pm (n - 1) . d) . \tfrac{1}{2} n$$ (nach §. 154.)

oder auch
$$(a \pm (n - 1) . \tfrac{1}{2} d) . n$$ (nach §. 155.)

§. CLVIII.

Zusatz. Wenn also aus den fünf Theilen einer arithmetischen Progression, nämlich aus dem ersten Gliede a, aus der Differenz d, der Anzahl der Glieder n, dem lezten Gliede (das wir u) und aus der Summe der Glieder (die wir s nennen wollen) drey bekannt sind, können allzeit die zwey übrige gefunden werden. So findet man z. B.

Aus

Aus $a, d, n,$

$$u = a \pm (n-1).d \text{ (nach §. 157.)}$$

Aus $a, n, u,$

$$s = (a+u).\tfrac{1}{2}n \text{ (nach §. 154.)}$$

Aus $a, s, u,$

$$n = \frac{s}{(a+u).\frac{1}{2}},$$

wenn man vorhergehende Gleichungen beyderseits dividirt mit

$$(a+u).\tfrac{1}{2}$$

Aus a, n, u

$$\pm d = \frac{u-a}{n-1},$$

weil $u = a \pm (n-1).d,$

und also

$$u-a = \pm (n-1).d \text{ (nach §. 111.)}$$

$$\frac{u-a}{\pm n-1} = d \text{ (nach §. 116.) u. s. w.}$$

§. CLIX.

Anmerkung. Hiedurch lassen sich verschiedne nützliche Aufgaben auflösen. z. B.

Man weis aus der Physik, daß die Räume, welche die Körper in ihrem Falle ungehindert durchwandern, in der arithmetischen Progression 1, 3, 5, 7, 9 u. s. w. anwachsen.

Man setze also die Differenz der Räume $2 = d$,
den ersten Raum $15 = a$,
die Anzahl der zweyten $14 = n$,
den Raum der lezten oder 14ten Zeit u,

 man

man möchte gern u wissen,

so ist

$$u = a + (n - 1) \cdot d = 15 \cdot 13 \cdot 2 = 390,$$

das ist, der Körper fällt in der 14ten Sekunde 390 Schuh.

Oder man möchte aus a, n, u die Summe der Schuhe s von allen Räumen wissen,

findet man

$$s = (a + u) \cdot \tfrac{1}{2} n = (15 + 390) \cdot 7 = 2835.$$

Oder es sey s, wie auch a und u bekannt, man verlangt die Anzahl der Glieder n zu finden,

ist $n = \dfrac{s}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}u} = \dfrac{2835}{202\frac{1}{2}} = 14.$ u. s. w.

Von den geometrischen Proporzionen.

§. CLX.

Erklärung. Die Gleichheit zweyer geometrischen Verhältnissen wird eine geometrische Proporzion genennt.

§. CLXI.

Zusatz. Weil in einer geometrischen Proporzion die zwey Verhältnisse gleich sind, müssen sie einerley Echsponenten haben (nach §. 135.)

Wenn man also das erste Glied der Verhältniß a,
der zweyten b,
den Echsponenten n, setzet,

ist $a : an = b : bn$

ein allgemeiner Ausdruck für abgesonderte oder diskrete geometrische Proporzionen.

§. CLXII.

§. CLXII.

Zusatz. Setzet man das erste Glied wieder a,
den Echsponenten n,
das dritte Glied gleich dem zweyten,
ist $a ; an = an : an^2$
ein allgemeiner Ausdruck für kontinuirliche geometrische Proporzionen.

§. CLXIII.

Lehrsatz. In einer geometrischen Proporzion ist das Produkt der äußern gleich dem Produkte der mittlern.

Beweis. Denn in der Proporzion

$a : an = b : bn$ ist $a . bn = an . b$,

oder ordinirt $abn = abn$,

und ebenfalls ist in

$a : an = an : an^2$,

$a . an^2 = an . an$ oder $aa . n^2 = aa . n^2$

§. CLXIV.

Zusatz. Wenn man dahero das Produkt der beyden mittlern Glieder mit dem ersten difidirt, findet man das vierte. z. B.

$$\frac{abn}{a} = bn$$

§. CLXV.

Zusatz. Da sich aber die Glieder so versetzen lassen, daß jedes das vierte werden kann, so kann man aus drey gegebnen geometrischen

Proporzionalgliedern jedesmal das vierte Proporzionalglied finden. z. B.
nach vorgehender Proporzion ist

$$abn = abn$$

folgsam

$$\frac{abn}{a} = bn, \quad \frac{abn}{bn} = a$$

$$\frac{abn}{an} = b, \quad \frac{abn}{b} = an \text{ (nach §. 115.)}$$

§. CLXVI.

Zusatz. Weil in einer kontinuirlichen Proporzion die beyde mittlern Glieder einander gleich sind, so ist das Produkt der mittlern Glieder $an.an$ ein Quadrat, welches dem Produkte der beyden äußern Glieder gleich ist. (nach §§. 63. 163)

§. CLXVII.

Zusatz. Man findet also das mittlere geometrische Proporzionalglied, wenn man aus dem Produkte der beyden äußern Glieder (nach §§. 77. u. 97.) die Quadratwurzel ausziehet.

§. CLXVIII.

Lehrsatz. Aus den Faktorn zweyer gleichen Produkte kann also eine geometrische Proporzion gemacht werden, wenn man die Faktores von einem Produkte für die mittlere, die Faktores von dem andern Produkte für die äußere zwey Glieder der Proporzion annimmt.

Beweis. Denn, weil in einer geometrischen Proporzion das Produkt der äußern Glieder, gleich ist dem Produkt der mittlern, kann man in jeder Gleichung ein Produkt ansehen, als das Produkt der mittlern, das andere aber, als das Produkt der äußern Glieder.

§. CLXIX.

Zusatz. Es können also z. B.

Aus $ab = ax - xx$, $xx - yy = 1$,
$ad = bc$, $1 - xx = a$

folgende Proporzionen gemacht werden,

$a : x = a - x : b$, $x + y : 1 = 1 : x - y$,
$a : b = c : d$, $1 : 1 - x = x : a$.

§. CLXX.

Zusatz. Und so oft sich wieder vier Glieder einer geometrischen Proporzion so verändern lassen, daß das Produkt der äußern Glieder gleich ist dem Produkte der mittlern, so oft lassen sich auch wieder die Proporzionen verändern. Derowegen wenn man für die Hauptproporzion annimmt

$a : an = b : bn$ oder $2 : 4 = 3 : 6$,

so ist verkehrt oder Invertendo

$an : a = bn : b$, $4 : 2 = 6 : 3$.

Permutando oder die mittlere verwechselt:

$a : b = an : bn$ $2 : 3 = 4 : 6$.

Komponendo oder zusammengesetzt:

$a : an + a = b : bn + b$, $2 : 4 + 2 = 3 : 6 + 3$.

Subtrahendo oder abgezogen:

$$a : an - a = b : bn - b, \quad 2 : 4 - 2 = 3 : 6 - 3.$$

Multiplikando, oder wenn man beyde Verhältnisse mit einer dritten Zahl vermehrt:

$$a : anc = b : bnc, \quad 2 : 4 . 2 = 3 : 6 . 2.$$

Dividendo, oder wenn man beyde Verhältnisse durch eine dritte Zahl dividirt:

$$\frac{a : an}{c} = \frac{b : bn}{c}, \quad 2 : \frac{4}{2} = 3 : \frac{6}{2}$$

Elevando, da man alle Glieder zur nämlichen Potenz erhöht:

$$a^2 : a^2 n^2 = b^2 : b^2 n^2, \quad 2^2 : 4^2 = 3^2 : 6^2.$$

Echstrahendo, da man aus allen Gliedern die Wurzeln vom nämlichen Grade auszieher:

$$\sqrt{a^2} : \sqrt{a^2 n^2} = \sqrt{b^2} : \sqrt{b^2 n^2}, \quad \sqrt{4} : \sqrt{16} = \sqrt{9} : \sqrt{36}.$$

§. CLXXI.

Anmerkung. Es ist sehr gut, wenn man sich dergleichen Veränderungen bekannt machet, weil sie von einem besondern Nutzen sind.

§. CLXXII.

Lehrsatz. Wenn man bey ganz verschiednen geometrischen Proporzionen die gleichnämige Glieder miteinander multiplizirt, oder durcheinander dividirt, kommen wieder neue geometrische Proporzionen heraus.

Beweis.

Beweis. Denn es seyen z. B. die Proporzionen

	$a : an = b : bn$	so ist	$2 : 4 = 3 : 6$
	$c : cm = d : dm$		$4 : 8 = 5 : 10$
multipl.	$ac : acmn = bd : bdmn$		$8 : 32 = 15 : 60$
difid.	$\frac{c}{a} : \frac{cm}{an} = \frac{d}{b} : \frac{dm}{bn}$		$\frac{4}{2} : \frac{8}{4} = \frac{5}{3} : \frac{10}{6}$

§. CLXXIII.

Lehrsatz. Wenn bey Proporzionen, derer gleichnämigen Glieder in einander multiplizirt werden, zwey nicht homologe Größen sind, so verhält sich das Produkt des ersten Paars Glieder zum Produkte des zweyten Paars, wie das dritte Glied der ersten Proporzion zum vierten Gliede der andern Proporzion.

Beweis. Denn es sey

$$t : T = s : u$$
$$c : C = u : S$$

so ist $ct : CT = su : Su$

das ist, wenn man mit u die zwey lezten Glieder difidirt,

$$ct : CT = s : S.$$

§. CLXXIV.

Lehrsatz. Wenn mehrere Proporzionen ein gemeinschaftliches Glied haben, so verhält sich das Produkt aller ersten Glieder zum Produkt aller zweyten, wie das dritte Glied der ersten Proporzion zum vierten Gliede der lezten Proporzion.

Beweis. Denn es sey

$$a:b = g:h$$
$$c:d = h:i$$
$$e:f = i:k$$

so ist $ace:bdf = ghi:hik$

das ist,

$$\frac{\quad}{} :hi$$

$$ace:bdf = g:k$$

§. CLXXV.

Anmerkung. Diese zwey Lehrsätze verdienen wohl beobachtet zu werden, weil auf ersten nicht nur die Regel quinque beruhet, sondern auch dessen Gebrauch in der Mechanik und andern mathematischen Theilen öfters unentbehrlich ist. Lezterer aber die gründliche Einsicht zur Kettenregel verschaffet.

Von den geometrischen Progressionen.

§. CLXXVI.

Erklärung. Eine geometrische Progression ist eine Reihe der Größen oder Zahlen, die immer in der nämlichen geometrischen Verhältniß größer oder kleiner werden. Wie z. B.

1, 2, 4, 8, 16, 32, u. s. w.

oder

64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

§. CLXXVII.

Zusatz. Nennet man nun das erste Glied a, den Echsponenten m,

so ist die Anzahl der Glieder,

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5,$$

die Progression a, ma, m^2a, m^3a, m^4a u. s. w.

folgsam der Echsponent oder Grad allzeit um eins kleiner, als die Anzahl der Glieder.

Denn z. B. es sey das lezte Glied m^4a, so ist die Anzahl der Glieder 5, und der Echsponent $4 = 5 - 1$ also $m^4a = m^{5-1}a$.

§. CLXXVIII.

Zusatz. Wenn man dahero allgemein, die Anzahl der Glieder n setzet, so ist das lezte Glied allgemein $m^{n-1}a$.

§. CLXXIX.

Zusatz. Verkehrt man vorgehende Progression in

$$5, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1$$
$$m^4a, \; m^3a, \; m^2a, \; ma, \; a$$

und setzet den allgemeinen Ausdruck $m^{n-1}a$ statt m^4a, ist

$$m^{n-1}a, \; m^{n-2}a, \; m^{n-3}a, \; m^{n-4}a. \quad \text{u. s. w.}$$

ein allgemeiner Ausdruck für geometrische Progressionen.

§. CLXXX.

Lehrsatz. Wenn man das lezte Glied $m^{n-1}a = u$ setzet, ist $mu = m^n a$

Beweis. Denn da

$$m^{n-1}a = \frac{m^n a}{m} \quad \text{(nach §. 70.)}$$

folgsam ist auch $u = \frac{m^n a}{m}$

und $\overline{mu = m^n a} \cdot m$ (nach §. 115.)

§. CLXXXI.

Lehrsatz. Wenn man das erste Glied a
den Echsponenten m,
die Anzahl der Glieder n nennet,
so ist die Summe einer geometrischen Progression

$$\frac{a - mu}{1 - m}$$

Beweis. Denn

$$\frac{1}{1-m} = 1 + m + m^2 + m^3 \text{:::} + \frac{m^n}{1-m} \quad \text{(nach §§. 51. und 57.)}$$

$$\frac{1}{1-m} - \frac{m^n}{1-m} = 1 + m + m^2 + m^3 \quad \text{(nach §. 111.)}$$

oder weil in dem ersten Gliede die Nenner einerley sind

$$\frac{1 - m^n}{1-m} = 1 + m + m^2 + m^3 \quad \text{(nach §. 47.)}$$

multiplizirt man beyde Glieder der Gleichung mit a, weil das erste Glied a ist, so ist

$$\frac{a - m^n a}{1 - m} = a + ma + m^2 a + m^3 a$$

und substituirt man $m^n a = mu$ (nach §. 179.)
ist $\frac{a - mu}{1 - m} = a + ma + m^2 a + m^3 a.$ u. s. w.

§. CLXXXII.

§. CLXXXII.

Zusatz. Wenn man also das erste Glied einer geometrischen Progression a,
den Echsponenten m,
die Anzahl der Glieder n,
die Summe der Progression s,
das lezte Glied u,
nennet: kann man allezeit aus drey davon bekannten Theilen die zwey übrige finden.

§. CLXXXIII.

Anmerkung. Um diesen Zusatz zu erläutern, setzen wir, daß man z. B. von der Progression,

in der $m = 2$, $n = 6$, $a = 3$ ist,

u finden wolle, so ist (nach §. 178.)

$$u = m^{n-1} a = 2^{6-1} 3 = 96$$

oder

daß man aus $u = 96$, $m = 2$, $a = 3$, s verlange,

so ist

$$s = \frac{a - mu}{1 - m} = \frac{3 - m . 96}{1 - 2} = \frac{-189}{-1} = 189,$$

wie in der Progression

3, 6, 12, 24, 48, 96

das erste Glied 3, die Anzahl der Glieder 6, der Echsponent 2, das lezte Glied 96, und die Summe der Glieder 189 ist.

Eben so kann man sehr leicht die andere Theile finden. z. B. Aus m, n und u kann man a finden,

weil $m^{n-1} a = u$

und also

$$a = u : m^{n-1} = 96 : 32 = 3 \quad \text{(nach §. 116.)}$$

oder

oder

es wäre a, n, u bekannt, man verlangt m, so ist wieder

$$m^{n-1}a = u$$

$$m^{n-1} = \frac{u}{a}$$

$$m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \sqrt[6-1]{32} = 2$$

§. CLXXXIV.

Lehrsatz. Die Summe s einer geometrischen Progression von Brüchen, derer Nenner a, und Zähler, 1, ist, ist gleich $\frac{1}{a-1}$, wenn die Zeichen nicht abwechseln: entgegen $\frac{1}{a+1}$ wenn sie abwechseln, das ist:

im ersten Fall ist

$$s = \frac{1}{a-1}$$

im zweyten

$$s = \frac{1}{a+1}$$

Beweis. Er ist aus §§. 55. und 59. klar, wenn man z. B. $2 = a$ setzet.

V. Abtheilung.

Von den Gleichungen zerschiedner Grade.

§. CLXXXV.

Erklärung.

Eine zusammengesezte Gleichung wird dasjenige Produkt genennt, welches entstehet, da man mehrere einfache und auf o reduzirte Gleichungen, in denen der Werth der unbekannten Größe verschieden seyn kann, miteinander multiplizirt, z. B.

wenn man $x = 2$, $x = 3$ annimmt,

oder auch

$$x = -4,$$

so ist

$x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 4 = 0$, (nach und §. 112.)

das Produkt von diesen lezten drey einfachen Gleichungen, oder die zusammgesezte Gleichung

$$x^3 - x^2 - 14\,x^1 + 24,$$

in der der Werth vom x sowohl, 2, als 3, wie -4 seyn kann.

§. CLXXXVI.

Erklärung. Diejenige Gleichungen, in den die höchste Potenz der unbekannteu Größe über das Quadrat steiget, heißen höhere Gleichungen, und

zwar

zwar vom 3ten, 4ten, 5ten Grade ꝛc. nachdem nämlich die höchste Potenz der unbekannten Größe auf den 3ten, 4ten oder 5ten Grad erhöht ist.

§. CLXXXVII.

Erklärung. Wenn in einer Gleichung die Echsponenten der unbekannten Größe nach der natürlichen Ordnung der Zahlen abwachsen, ohne daß die höchste Potenz der unbekannten Größe mit einer bekannten verbunden, und zulezt ein Produkt aus lauter bekannten Größen zugegen ist, wird sie eine ordinirte und komplete Gleichung genennt: wo nicht, eine unordinirte und inkomplete. z. B.

Die Gleichung in (§. 185.) ist ordinirt und komplet, weil die Echsponenten 3, 2, 1, in natürlicher Ordnung abwachsen, und zulezt

Ein Produkt

aus $-2. -3. +4 = 24$ zugegen ist.

Entgegen

ist $x^3 + x^5 - x^2 - b$ inordinirt, weil sie stehen müßte

$$x^5 + x^3 - x^2 - b,$$

und inkomplet, weil x^4 und x^1 abgehet.

§. CLXXXVIII.

Willkürlicher Satz. Wenn in einer Gleichung ein Terminus abgehet, wird zum Zeichen in dessen Stelle ein Sternlein gesezt. z. B.

$$x^5 * + x^3 - x^2 * - b.$$

§. CLXXXIX.

§. CLXXXIX.

Anmerkung. Jeder Terminus einer Gleichung bekömmt seine Benennung von der Stelle, die ihn in einer kompleten und ordinirten Gleichung trift. So wird der erste Terminus die unbekannte Größe genennt, welche in der Gleichung zur höchsten Potenz erhöht ist.

Der zweyte, in dem der Echsponent der unbekannten Größe um 1 kleiner.

Der dritte, in dem der Echsponent wieder um 1 kleiner ist, als in dem zweyten Termino.

Und endlich der lezte, in dem nichts, als bekannte Größen sind.

§. CXC.

Aufgabe. Die Eigenschaften zusammgesezter Gleichungen zu erklären.

Auflösung. Man setzet eine unbekannte und einfache Größe, so viel einfachen und bekannten Größen (die man die Wurzeln nennt) gleich, als man will, reduzirt sodenn alle solche einfache Gleichungen auf o, und multiplizirt sie miteinander, so werden die daraus entstehende Termini die Eigenschaften deutlich anzeigen, wenn man nur alle die bekannte Größen oder Wurzeln, die mit der nämlichen Potenz der unbekannten Größe multiplizirt sind, als Koeffizienten zusammen, und der nämlichen Potenz (nach §. 31.) vor oder nachsetzet. z. B.

Man setze

$$x = a \qquad x - a = 0$$
$$x = b \quad \text{so ist} \quad x - b = 0$$
$$x = c \qquad x - c = 0$$

folgsam

$$\begin{array}{r} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline -bx + ab \\ x^2 - ax \\ \hline x^2 - (a+b) \cdot x + ab = 0 \\ \text{und} \qquad\qquad x - c \\ \hline -cx^2 + (ac+bc) \cdot x - abc \\ x^3 - (a+b)\, x^2 + ab \cdot x \\ \hline \end{array}$$

Formul $x^3 - (a+b+c) \cdot x^2 + (ab+ac+bc) \cdot x^1 - abc = 0$

§. CXCI.

Anmerkung. Aus dieser Formul siehet man also:

I. Daß bey einer zusammengesezten Gleichung der Echsponent der höchsten Potenz von der unbekannten Größe so viel Einheiten habe, als die Gleichung Wurzeln hat; denn die Gleichung hat die Wurzeln a, b, c, und der Echsponent von x^3 oder 3 hat drey Einheiten.

II. Daß der Koeffizient vom zweyten Termino x^2, die Summe aller Wurzeln, oder $(a+b+c)$ und

III. Der Koeffizient vom dritten Termino x^1 die Summe aus jeden zweyen Wurzeln oder $(ab+ac+bc)$ sey.

IV.

IV. Daß die Gleichung um einen Terminum mehr habe, als der Exponent 3 von der höchsten Potenz der unbekannten Größe Einheiten hat.

V. Daß der lezte Terminus abc das Produkt von allen Wurzeln sey, und daß endlich

VI. Alle Wurzeln positife seyn, wenn die Zeichen + und — abwechseln.

§. CXCII.

Anmerkung. Die übrigen Eigenschaften verschiedner Gleichungen kann man sich eben so bekannt machen, wenn man statt lauter positifen Wurzeln, negatife, oder theils negatife, theils positife Wurzeln annimmt, und wieder (nach §. 190.) verfährt.

§. CXCIII.

Lehrsatz. Eine Gleichung, in der der lezte Terminus abgehet, ist eine Gleichung von dem nächst niederem Grade.

Beweis. Denn, weil solchergestalten die unbekannte Größe in allen Terminis vorkömmt, kann man von dem vorlezten Termino (um eine komplete Gleichung zu erhalten) die unbekannte Größe wegbringen, wenn man mit derselben (nach §. 116.) alle Terminos difidirt: da aber dadurch alle Termini der Gleichung um einen Grad niederer werden, so muß auch die ganze Gleichung um einen Grad niederer seyn. z. B.

Es sey $x^3 - ax^2 + bx = 0 : x$

so ist $x^2 - ax^1 + b = 0.$

§. CXCIV.

Zusatz. Es ist dahero

$$x^3 - ax^2 + bx = 0$$

eigentlich eine komplete Gleichung vom zweyten Grade (nach §§. 186. und 187.)

§. CXCV.

Lehrsatz. Eine Gleichung wird aufgelößt, das ist, alle Glieder der Gleichung heben sich gegeneinander, wenn man eine Wurzel der Gleichung (was man für eine will) in die Stelle der unbekannten Größe setzet.

Beweis. Man setze z. B. in der Gleichung

$$x^3 - (a+b+c) \cdot x^2 + (ab+ac+bc) \cdot x - abc = 0$$

für x, die Wurzel a, b, oder c,

gesetzt a,

und also a^3, a^2, a für x^3, x^2, x,

folgsam wird die Gleichung

$$a^3 - (a+b+c) \cdot a^2 + (ab+ac+bc) \cdot a - abc = 0,$$

oder wenn man wirklich multiplizirt,

$$a^3 - a^3 - a^2b - a^2c + a^2b + a^2c + abc - abc = 0$$

Aus dem man siehet, daß sich alle Termini gegeneinander heben (nach §. 19.) und also die ganze Gleichung 0 werde.

§. CXCVI.

Anmerkung. Damit die Verrichtungen mit Gleichungen um so leichter von statten gehen, reduzirt

zirt man sie aus einem so einfachen Ausdrucke, als es seyn kann. z. B. In der Gleichung

§. CXCVII.

Zusatz. Setzet man den Koeffizienten des zweyten Termini $-(a+b+c)=-p$, des dritten $(ab+ac+bc)=q$, des lezten $-abc=-r$, und setzet diese gleich werth bey der Gleichung in derer Stelle, so ist die reduzirte Gleichung

$$x^3-px^2+qx-r=0.$$

Von der Veränderung der Gleichungen.

§. CXCVIII.

Erklärung. Die Veränderung der Gleichungen ist eine Verrichtung, durch welche die unbekannte Größe um jede gegebne bekannte Größe in einer Gleichung vermindert oder vergrößert wird.

§. CXCIX.

Zusatz. Man kann also bey Veränderung der Gleichungen die vier Rechnungsarten anbringen, wenn man sich einer schicklichen Substituzion bedient, welches sich am besten durch Beyspiele erläutern läßt. z. B.

Man soll in der Gleichung $x^2-2x-8=0$ die unbekannte Größe x um 3 größer, oder um 2 kleiner machen,

setzet man
im ersten Fall, $x+3=y$,
im zweyten $x-2=y$,

so ist der

Ite Fall Addition

$$x+3=y \text{ und}$$
$$x=y-3 \quad \text{folgsam}$$
$$x^2=y^2-6y+9$$
$$-2x=-2y+6$$
$$-8=-8$$
$$x^2-2x-8=y^2-8y+7=0$$

eine Gleichung, in welcher die unbekannte Wurzel x um 3 vergrößert ist.

IIte Fall Subtraktion

$$x-2=y$$
$$x=y+2$$
$$x^2=y^2+4y+4$$
$$-2x=-2y-4$$
$$-8=-8 \quad \text{folgsam ist}$$
$$x^2-2x-8=y^2+2y-8=0$$

eine Gleichung, in welcher x um 2 vermindert ist.

§. CC.

Zusatz. Auf gleiche Weise kann man die unbekannte Größe multipliziren oder difidiren. z. B.

Man soll in der Gleichung x^3-px^2+qx-r die unbekannte Größe x mit 2 multipliziren, oder mit 3 difidiren. Setzet man

im ersten Fall $2x=y$,

im zweyten $\frac{x}{3}=y$,

so

so ist im Iten Fall Multiplikazion

$$2x = y$$
$$x = \frac{y}{2}$$
$$x^3 = \frac{y^3}{8} \quad \text{und also (nach §. 65.)}$$
$$-px^2 = -\frac{py^2}{4}$$
$$+qx = \frac{qy}{2}$$
$$-r = -r \quad \text{folglich}$$
$$x^3 - px^2 + qx - r = \frac{y^3}{8} - \frac{py^2}{4} + \frac{qy}{2} - \frac{r}{1} \cdot 8$$
$$= 0 = y^3 - 2py^2 + 4qy - 8r = 0$$

(nach §. 119.) eine Gleichung in der die unbekannte Größe $y = 2x$ ist.

IIte Fall, Division

$$\frac{x}{3} = y$$
$$x = 3y$$
$$x^3 = 27y^3 \quad \text{und also (nach §.66.)}$$
$$-px^2 = -9py^2$$
$$+qx = +3qy$$
$$-r = -r \quad \text{folglich}$$
$$x^3 - px^2 + qx - r = 27y^3 - 9py^2 + 3qy - r = 0 \quad : 27$$
$$+\frac{y^3}{1} - \frac{py^2}{3} + \frac{qy}{9} - \frac{r}{27} = 0$$

(nach §. 116.) eine Gleichung, in welcher $\frac{x}{3} = y$ ist.

§. CCI.

Zusatz. Aus den lezten Gleichungen dieser zween Fälle folgt also, daß eine gegebene Gleichung multiplizirt werde, wenn man sie durch die geometrische Progression multiplizirt, dessen erstes Glied und der Echsponent die Zahl ist, durch welche die Gleichung multiplizirt werden soll: und daß sie difidirt werde, wenn man die gegebene Gleichung durch eine geometrische Progression difidirt, dessen erstes Glied, 1, und der Echsponent die Zahl ist, durch die sie difidirt werden soll.

§. CCII.

Aufgabe. Einen Terminum herzustellen, der in einer Gleichung fehlet.

Auflösung. Man vermehrt die unbekannte Größe um 1, und verfährt im übrigen völlig (nach §. 199.) z. B.

Es sey die Gleichung $x^3 + ax^2 * - ab$.
Man möchte den dritten Terminum herstellen,

setzet man

$$x + 1 = y$$

so ist

$$\left.\begin{array}{l} x = y - 1 \text{ und also} \\ x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ ax^2 = + ay^2 - 2ay + a \\ - ab = \qquad\qquad - ab \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} \text{weil } ay^2 - 3y^2 = \\ (a - 3) \cdot y^2, \\ 3y - 2ay = \\ (3 - 2a)\, y \end{array}$$

$$x^3 + ax^2 * - ab = y^3 + (a - 3)\, y^2 + (3 - 2a)\, y + a - ab - 1.$$

§. CCIII.

Aufgabe. Den zweyten Terminum einer Gleichung wegzubringen.

Auflösung. Man difidirt den Koeffizienten des zweyten Termini durch den Echsponenten des ersten Termini, addirt sodenn solchen Quozienten zur unbekannten Größe, wenn der erste und zweyte Terminus einerley Zeichen, oder subtrahirt ihn von selber, wenn sie verschiedne Zeichen haben, und verfährt im übrigen (nach §. 198.) z. B. Es sey die Gleichung $x^2 - ax - bb = 0$

so setzet man

$$x - \tfrac{1}{2}a = y,$$

wo deme nach ist

$$x = y + \tfrac{1}{2}a$$

folgsam

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + ay + \tfrac{1}{4}a^2 \\ -ax &= -ay - \tfrac{1}{2}a^2 \\ -bb &= -bb \end{aligned}$$

$$y^2 * - \tfrac{1}{4}a^2 - b^2 = 0$$

§. CCIV.

Aufgabe. Alle Wurzeln, die in einer Gleichung enthalten sind, zu finden.

Auflösung. Da der lezte Terminus das Produkt aller Wurzeln ist (nach §. 191.) resolfirt man solches in seine Faktores; und substituirt in der Gleichung einen Faktor nach dem andern als positif oder negatif für x: denn, in welchen Fällen in der herauskommenden Gleichung sich die positifen oder negatifen Größen gegeneinander heben, in diesen ist der substituirte Faktor eine Wurzel vom x (nach §. 195.) z. B.

Es sey die Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ so hat der lezte Terminus 6 zu seinem Faktor 2 und 3.

Man setze

$$x = 2, \quad x = 3,$$

so ist

$$\begin{array}{ll} x = 2, & x = 3 \\ \hline x^2 = 4, & x^2 = 9 \\ -5x = -10, & -5x = -15 \\ +6 = +6, & +6 = +6 \\ \hline 0 = 0 & 0 = 0 \end{array}$$

Es ist dahero 2 und 3 eine wahre Wurzel von dieser Gleichung.

§. CCV.

Oder es sey die Gleichung $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ so sind die Faktores dessen lezten Termini 2, 3 und 4.

setzet man nun

$$x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4,$$

so ist

$$\begin{array}{ll} x = 2 & x = 3 \\ \hline x^3 = 8 & x^3 = 27 \\ -x^2 = -4 & -x^2 = -9 \\ -14x = -28 & -14x = -42 \\ +24 = +24 & +24 = +24 \\ \hline 0 = 0 & 0 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|rcl} x & = & 4 & x & = & -4 \\ \hline x^3 & = & 64 & x^3 & = & -64 \\ -x^2 & = & -16 & -x^2 & = & -16 \\ -14x & = & -56 & -14x & = & +56 \\ +24 & = & +24 & +24 & = & +24 \\ \hline 0 & = & +16 & 0 & = & 0 \end{array}$$

2, 3, 4, sind also wahre Wurzeln von dieser Gleichung.

§. CCVI.

Zusatz. Weil die zusammengesetzte Gleichungen entstehen, wenn man einfache, und auf 0 reduzirte Gleichungen miteinander multiplizirt (nach §. 185.) so müssen sich die zusammengesezte Gleichungen wieder durch die nämliche einfache Gleichungen zurück difidiren lassen, aus derer Multiplikazion sie entstanden sind.

Zerfällt man dahero in der Gleichung

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$

das lezte Glied als das Produkt aller Wurzeln in seine Faktores 2, 3, 4,

und setzet

$$x - 2 = 0, \quad x + 2 = 0,$$
$$x - 3 = 0, \quad x + 3 = 0,$$
$$x - 4 = 0, \quad x + 4 = 0,$$

so findet man, wenn man (nach §. 39.) mit diesen einfachen Gleichungen die Difision in die zusammengesezte probirt, durch was für einfache Gleichungen sich die zusammengesezte völlig difidiren lassen, und also, was die Gleichung für Wurzeln habe. z. B.

Man

Man findet, daß

$$(x^3 - x^2 - 14x + 24) : (x - 2) = x^2 + x - 12 = 0,$$

$$(x^2 + x + 2) : (x - 3) = x + 4 = 0,$$

folglich auch

$\sqrt{(x+4)}$ das ist $(x+4):(x+4) = 0$ sey.
Daß also die zusammengesezte Gleichung aus der Multiplikazion der einfachen

$$x - 2 = 0, \quad x - 3 = 0, \quad x - 4 = 0$$

entstanden, und also

$x = 2$, $x = 3$, $x = -4$, oder $2, 3, -4$ die Wurzeln der zusammengesezten Gleichung seyn (nach §§. 113. und 190.)

§. CCVII.

Anmerkung. Es giebt zwar mehrere Arten, die Wurzeln der zusammengesezten Gleichung zu finden, allein die vorgesezten Schranken lassen nicht zu, daß man sich damit in Weitläufigkeiten einlasse.

§. CCVIII.

Aufgabe. Aus jeder gegebenen Gleichung die Wurzel durch Näherung zu finden.

Auflösung. Man substituirt in der gegebenen Gleichung für die unbekannte Größe nach und nach 1, 2, 3, 4 u. s. w. und reduzirt alle herauskommende Gleichungen, bis man auf eine reduzirte Gleichung kömmt, bey welcher sich die reduzirte Größe in + verändert. Die Wurzel, bey welcher sich die reduzirte Gleichung in + verändert hat, wird die nächstgrößere; die Wurzel von der vorgehenden Gleichung aber die nächstkleinere Wurzel von der gegebenen Gleichung seyn.

z. B. Es sey die gegebene Gleichung

$$x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$$

wenn		so ist
$x = 1$	= =	$1 + 2 - 23 - 70 = -90$
$x = 2$	= =	$8 + 8 - 46 - 70 = -100$
$x = 3$	= =	$27 + 18 - 69 - 70 = -94$
$x = 4$	= =	$64 + 32 - 92 - 70 = -66$
$x = 5$	= =	$125 + 50 - 115 - 70 = -10$
$x = 6$	= =	$216 + 72 - 138 - 70 = +80$

Die Wurzel von dieser gegebnen Gleichung ist also kleiner als 6, weil von der Wurzel 6 die Gleichung um 80 größer als 0 ist, und größer als 5, weil von der Wurzel 5 die Gleichung um -10 kleiner als 0 ist.

Man nennet also den Bruch, um welchem die Wurzel der gegebnen Gleichung größer als 5 ist, y, so ist $x = 5 + y$,

und substituirt diesen Werth in der gegebnen Gleichung, so hat man

$$x = 5 + y$$

$$\begin{aligned} x^3 &= 125 + 75y + 15y^2 + y^3 \\ 2x^2 &= 50 + 20y + 2y^2 \\ -23x &= -115 - 23y \\ -70 &= -70 \\ \hline & -10 + 72y + 17y^2 + y^3 = 0 \end{aligned}$$

Oder

Oder weil die Brüche, wenn sie zu höhern Graden kommen, so klein werden, daß man sie ohne merklichen Fehler weglassen kann (nach §. 65.)

$$-10 + 72y + 17y^2 = 0 \quad \text{folgsam}$$
$$17y^2 + 72y = 10$$
$$y^2 + \frac{72y}{17} = \frac{10}{17} \quad \text{(nach §. 116.)}$$

Mithin die Brüche $\frac{72}{17}$ und $\frac{10}{17}$ in Decimalbrüche verwandelt

$$y^2 + 42352\, y = 0588235\text{3}0$$

und also

$$y^2 + 4235\, y + 448229764 = 5 \cdot 07246506$$

(nach §. 129.)

$$y + 21176 = 22522$$
$$y = 0 \,.\, 1346 \quad \text{(nach §. 111.)}$$
$$x = 5 \,.\, 1346$$

VI. Abtheilung.

Von Auflösung der algebraischen Aufgaben und Anwendung auf die gemeine Rechenkunst.

§. CCIX.

Erklärung.

Die Verhältnisse, welche man in einer algebraischen Aufgabe zwischen den bekannten und unbekannten Größen setzet, werden die Bedingnisse der Aufgaben genennt, weil man dadurch erkennen muß, wie die Gleichheit zwischen den bekannten und unbekannten Größen erhalten werde. Und eine algebraische Aufgabe auflösen, heißt nichts anders, als vermittels der gegebenen Bedingnisse durch Gleichungen den Werth von jeder unbekannten Größe, die in der Aufgabe enthalten ist, insonderheit zu finden, oder auch zu zeigen, daß wegen Widerspruch oder Mangel genugsamer Bedingnisse, die Aufgabe unmöglich und unvollständig sey.

§. CCX.

Aufgabe. Eine algebraische Aufgabe aufzulösen.

Auflö-

Auflösung. Itens. Man überlegt die Beschaffenheit und Bedingnisse der Aufgabe, die sie in sich hält.

IItens. Man bemerkt die bekannten Größen mit den ersten Buchstaben des Alphabets, die unbekannten mit den lezten.

IIItens. Wenn man alle bekannte und unbekannte Größen nebst ihren Zeichen nach Gestalt der Bedingnisse ausgedruckt hat, macht man aus denselben so viel Gleichungen, als unbekannte Größen zugegen sind, welche die erste Gleichungen genennt werden.

IVtens. Nach diesem bringet man eine unbekannte Größe von einer der kürzesten Gleichungen auf ein Glied, und setzet dessen Werth, nämlich das andere Glied, in der andern Gleichung an die Stelle, wenn zwey unbekannte Größen in der Aufgabe vorkommen. (nach §. 122.)

Vtens. Sind mehrere unbekannte Größen zugegen, setzet man erstbemeldten Werth in alle noch übrige Gleichungen (nach §. 124.) und nimmt von den Gleichungen, bey denen die Substitution ist gemacht worden, eine der kürzesten, bringt von derselben eine unbekannte Größe allein auf ein Glied, setzet dessen gleichen Werth in den noch übrigen Gleichungen an ihre Stelle, und diese Verrichtung wiederholt man so oft, bis man eine unbekannte Größe nach der andern hat verschwinden gemacht, damit man dadurch jede unbekannte Größe insonderheit bestimmen könne.

VItens.

VIteus. Wenn endlich in einem Gliede allein die bekannten Größen sind, in dem andern allein eine unbekannte Größe stehet, setzet man statt der bekannten Buchstaben die Zahlen, die sie ausdrücken, und macht die Operationen in Zahlen, die die Zeichen in dieser letzten Gleichung bey den bekannten Buchstaben anzeigen.

§. CCXI.

Anmerkung. Man bringet aber in einer Gleichung, oder auch in einer Aufgabe, in der nur eine unbekannte Größe vorkömmt, die unbekannte Größe allein in ein Glied, wenn man sie von den bekannten Größen, mit denen sie durch die Multiplikation oder Difision verbunden sind (nach §. 116. oder 119.) befreyet, und alle bekannte Größen (nach §. 113.) in ein Glied setzet.

§. CCXII.

Anmerkung. Dieses ist noch zu erinnern, daß die ähnliche Größen oder Theile ähnlicher Größen durch ähnliche Buchstaben ausgedrückt werden, doch so, daß man denselben die gehörige Koeffizienten oder Nenner beyfüge. z. B.

Wenn man sagt, der Petrus hat eine gewisse unbekannte Zahl Gulden (die wir x nennen wollen); der Paulus aber dreymal so viel, setzet man des Pauli unbekannte Anzahl nicht y, sondern $3x$, oder der Paulus habe dessen $\frac{1}{3}$, setzet man für die Anzahl der Gulden ebenfalls nicht z, sondern $\frac{1}{3}x$, oder $\frac{x}{3}$

§. CCXIII.

Aufgabe. Man weis, daß in einem Zeughause 200000 Stück Kugeln seyen, man weis auch, daß sie in folgenden Arten bestehen: nämlich in einer gewissen Anzahl 12 Pfünder, in doppelt so viel 6 Pfünder, weniger 600, und in einer Anzahl 4 Pfünder, welche um 2300 größer, als die Anzahl der 12 und 6 pfündigen Kugeln ist. **Ist die Frage, wie viel von jeder Gattung zugegen seyen?**

Auflösung. Man setzet

$$200000 = a$$
$$600 = b$$
$$2300 = c$$

die unbekannte Anzahl der 12 pfündiger Kugeln x, so ist (nach §. 212.) und der gegebnen Bedingnissen der

Ausdruck in Worten,	Ausdruck in Zeichen,
die Anzahl der 12 pf. Kugeln	x
die Anzahl der 6 pfündiger	$2x - b$
die Anzahl der 4 pfündiger	$3x - b + c$
Also die Anzahl aller Kugeln	$6x - 2b + c = a$
	$6x = a + 2b - c$
	$x = \frac{a + 2b - c}{6}$

Wenn man nun statt den bekannten Buchstaben, die Zahlen setzet, für welche sie sind genommen worden, ist $x = \frac{200000 + 1200 - 2300}{6} = 33150$

$$2x - b = 2 \times (33150) - 600 = 65700$$
$$3x - b + c = 3 \times (33150) - 600 + 2300$$
$$= 101150.$$

Man siehet also, daß nach diesen Bedingnissen die Anzahl der

12 pfündiger Kugeln		33150
6 pfündiger	= =	65700
4 pfündiger	= =	101150 sey.

§. CCXIV.

Aufgabe. Ein Infanteriekorps ist aus einem Platze marschirt, und machet täglich 4 Stunden Wegs. Man will in 3 Tagen solchem von dem nämlichen Platze aus ein Detaschement Kawallerie nachschicken, das sich damit in 4 Tagen soll konjungiren können. Es fragt sich, wie viel Stunden Wegs die Kawallerie täglich machen soll?

Auflösung. Man setze

den täglichen Marsch der Infanterie $4 = a$
die Tage, um die sie voraus ist = = = $3 = b$
den Tag, an welchem sich die Kawallerie damit konjungiren soll = = = $4 = c$
den Marsch, den die Kawallerie täglich machen muß = = = = = = x

so wird nach gesetzten Bedingnissen die Gleichung sehr leicht zu erhalten seyn; denn weil von dem nämlichen Platze aus die Infanterie und Kawallerie sich konjungiren soll, muß der ganze Marsch von der Kawallerie so groß seyn, als der von der Infanterie. Nun erlangt man solchen, wenn man den täglichen Marsch mit der Anzahl der Tage multiplizirt,

folgsam

folgsam ist

der ganze Marsch der Kawallerie = = = cx
der Marsch, den die Infanterie voraus gemacht ab
und den sie unter währendem Marsch der
Kawallerie gemacht = = = = ac
also der ganze Marsch der Infanterie $ab + ac = cx$

$$\frac{ab+ac}{c} = x$$

setzet man statt den bekannten Buchstaben die Zahlen, ist

$$x = \frac{ab+ac}{c} = \frac{4 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{4} = 7$$

das ist: der Marsch von der Kawallerie ist täglich 7 Stund.

§. CCXV.

Aufgabe. Zwey Korps, die 28 Meilen voneinander entfernt sind, marschiren zu gleicher Zeit gegeneinander. Das Korps A marschirt täglich 3 Meilen — das Korps B 4 Meilen. Ist die Frage, an welchem Tage beyde Korps zusammenkommen?

Auflösung. Man setze

die Entfernung beyder Korps $28 = a$
den täglichen Marsch des Korps A $3 = b$
= = = des Korps B $4 = c$
die unbekannte Zeit der Zusammenkunft x
so ist der Marsch des Korps A bx
= = = des Korps B cx
und folgsam $bx + cx = a$

$$x = \frac{a}{b+c}$$ (nach §. 117)

oder in Zahlen $x = \frac{28}{3+4} = 4$

das ist: in 4 Tagen kommen die zwey Korps zusammen.

§. CCXVI.

Aufgabe. Man weis, daß zwey Korps 16000 Mann stark sind, und daß das kleine Korps um 1200 Mann schwächer, als das größere sey. Es wird gefragt, wie stark jedes Korps insonderheit sey?

Auflösung. Man nenne die Mannschaft
vom kleinern Korps = = x
vom größern = = = y
von beyden Korps 16000 = a
die Differenz derselben 1200 d
so ist = = = = $x - y = d$
$x + y = a$
und also = = = = $x = d + y$
setzet man (nach §. 122.) in die andere Gleichung statt x den gleichen Werth = = = $d + y$
ist = = $x + y = d + y + y = d + 2y = a$

$$2y = a - d$$

$$y = \frac{a - d}{2}$$

Oder will man x wissen, setzet man den gleichen Werth von y in die andere Gleichung;
denn, weil $x - y = d$
folgsam ist $x - d = y$
und dahero $x + y = x + x - d = 2x - d = a$
mithin $2x = a + d$

$$x = \frac{a + d}{2}$$

setzet man für $\frac{a-d}{2}$ und $\frac{a+d}{2}$ die Zahlen, ist

$$y = \frac{16000 - 1200}{2} = 7400$$

$$x = \frac{16000 + 1200}{2} = 8600$$

Das kleine Korps ist also stark 7400
das größere 8600 Mann.

§. CCXVII.

Zusatz. Weil man unter den Buchstaben Zahlen verstehen kann, was man für eine will, so folget hieraus, daß, wenn man zwo Zahlen in eine Summe nimmt, die größere allezeit aus der halben Summe und der halben Differenz, die kleinere aber aus der halben Summe weniger der halben Differenz entstehe.

§. CCXVIII.

Aufgabe. Zwey Kommandanten, deren jeder wegen zweydeutigen Märschen die feindliche Ankunft auf seinem Platze zu besorgen hat, erstatten folgenden Bericht. Der erste, daß man seinen Platz (den wir A nennen) von des andern Kommandanten Platz (den wir B nennen) noch ein Regiment zuschicken möchte, damit er auch so viel Regimenter wie der Platz B habe. Der Kommandant vom Platz B aber, daß man ihm statt dessen noch von dem Platz A ein Regiment schicken möchte, daß er doppelt so viel Regimenter als der Platz A habe, weil sein Platz noch so viel Defension brauchet. Es ist die Frage, wie viel

viel in jedem Platz Regimenter und Mann sind, wenn man jedes Regiment zu 1000 Mann rechnet.

Auflösung. Man nennet die Anzahl der Regimenter oder Garnison

im A	y
im B	x

und schließet nach der ersten Bedingniß: wenn die Garnison y ein Regiment bekömmt, und der Garnison x ein Regiment genommen wird, so ist die Anzahl der Regimenter beyderseits gleich,

oder = = = $y + 1 = x - 1$

und also sind die Werthe vom $y + 2 = x$

$$y = x - 2$$

Man schließet ferner nach der zweyten Bedingniß: wenn statt dessen x ein Regiment bekömmt, und y ein Regiment genommen wird,

so ist $x + 1$ doppelt so groß als $x - 1$,

oder = = = $x + 1 = 2y - 2$

Substituirt man in dem ersten Gliede dieser zweyten Gleichung den Werth $y + 2$ für x

ist $y + 2 + 1 = y + 3 = 2y - 2$

folgsam $y + 5 = 2y$

$$5 = y$$

oder weil $x + 1 = \overline{2y - 2} : 2$

und also $\dfrac{x + 1}{2} = y - 1$

Wenn man in dieser letzten Gleichung $x - 2$ für y substituirt,

so ist $\frac{x+1}{2} = x - 3$

$x + 1 = 2x - 6$ (nach §. 119.)

$x + 7 = 2x$

$7 = x$

Im Platz A also liegen 5 Regimenter.
im B 7

und, wenn man jedes Regiment zu 1000 Mann rechnet, liegen

im A 5000 Mann.
im B 7000

§. CCXIX.

Aufgabe. Ein Partengänger will die gemachte Beute unter seine Leute austheilen, und findet, daß ihm von derselben noch 30 fl. übrig bleiben, wenn er jedem Mann 3 fl. giebt: hingegen wenn er jedem Mann 4 fl geben will, findet er, daß er um 70 fl. zu wenig habe. Es fragt sich, wie viel er Leute und Geld gehabt?

Auflösung. Man setze die Anzahl

der Leute x

der Gulden y

30 $= a$

70 $= b$

also ist $3x + a = y$

und $4x - b = y$

folgsam $3x + a = 4x - b$

$3x + a + b = 4x$

$a + b = x$

Nun substituire man für $3x$, $3a+3b$

so ist $3x+a=4a+3b=y$

und also, wenn man für die bekannte Buchstaben die Zahlen setzet $x=30+70=100$

hat er gehabt $y=4\cdot30+3\cdot70=330$

Mann 100

Geld 330 fl.

§. CCXX.

Aufgabe. Ein Loth fein Silber kostet 20 Batzen, und 1 Loth Kupfer 1 Batzen. Man fragt, wie viel man Kupfer unter das Silber mischen soll, daß man das Loth vermischtes Silber um 1 fl. oder 15 Batzen geben kann?

Auflösung. Man setze den Preis

des feinen Silbers $20=a$

des Kupfers $1=b$

den mittlern Preis $15=c$

das Loth $=1$

die Quantität des zu mischenden Kupfers x

so bleibt von dem ganzen Lothe des vermischten Silbers für die Quantität des zu mischenden Silbers übrig $1-x$

Man kann dahero für den Preis des zu mischenden Kupfers schließen:

1 Loth Kupfer kostet b, was kostet das zu mischende Kupfer x,

oder $1:b=x$

so findet man (nach §. 43. und 164.) $\frac{bx}{1}$ oder bx

Eben

Eben so kann man für den Preis des zu mischenden Silbers schließen: $1 : a = 1 - x$

so findet man für denselben $\frac{a - ax}{1} = a - ax$

Da nun diese beyde Preise nach gesezter Bedingniß c gleich seyn sollen,

so setzet man

$$bx + a - ax = c$$
$$bx - ax = c - a$$

(nach §. 117.) $x = \frac{c - a}{b - a}$

Und also: wenn man statt den Buchstaben die Zahlen setzet, für die sie sind angenommen worden,

ist $x = \frac{15 - 20}{1 - 20} = \frac{5}{19}$ Loth.

bleiben für die Quantität des zu mischenden feinen Silbers $\frac{14}{19}$ Loth.

§. CCXXI.

Aufgabe. Die Garnison eines Platzes bestehet aus Infanterie, Dragoner und Husaren; die Infanterie und Dragoner zusammgenommen, machen 5000 Mann mehr als die Husaren aus; die Infanterie und Husaren um 4000 Mann mehr als die Dragoner; und die Dragoner und Husaren machen 3000 Mann weniger als die Infanterie. Fragt sichs, wie stark die Garnison sey, und wieviel Infanterie, Dragoner und Husaren seyen?

Auflösung. Man setze die Anzahl

der Infanterie	x
der Dragoner	y
der Husaren	z
5000	$= a$
4000	$= b$
3000	$= c$

so ist nach der ersten Bedingniß $= x + y - a = z$
nach der zweyten $x + z - b = y$
nach der dritten $y + z + c = x$

Wenn man nun den Werth vom z in den zwey letztern Gleichungen substituirt

$$x + z - b = x + x + y - a - b$$
$$= 2x + y - a - b = y$$
$$y + z + c = y + x + y - a + c$$
$$= 2y + x - a + c = x$$

(nach §§. 25. 124. 112. 113 und 116.

$$2x - a - b = 0 \quad \text{und} \quad 2y - a + c = 0$$
$$x = \frac{a + b}{2} \qquad y = \frac{a - c}{2}$$

Derowegen, wenn man in der ersten Gleichung für x und y ihm bekannte Werthe substituirt

$$z = \frac{a + b + a - c}{2} - a =$$

$$\frac{2a + b - c - 2a}{2} = \frac{b - c}{2}$$

setzet

setzet man statt den Buchstaben die Zahlen für die sie sind angenommen worden, ist

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{5000+4000}{2} = 4500$$

$$y = \frac{a-c}{2} = \frac{5000-3000}{2} = 1000$$

$$z = \frac{b-c}{2} = \frac{4000-3000}{2} = 500$$

Mithin bestehet

	die Infanterie		4500	
	die Dragoner		1000	
	die Husaren	in	500	Mann.
und	die ganze Garnison		6000	

VII. Abtheilung.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

§. CCXXII.

Aufgabe.

Ein rechtwinkeliches Parallegram ist um 24 Schuh länger als breit, und hat in seinem Quadratinhalt 44800 Quadratschuhe.

Man fragt wie groß jede Seite sey?

Auflösung. Man setze

den Quadratinhalt $44800 = a$

die Differenz der Seite $24 = d$

die größere Seite = = = x

die kleinere = = = = y

so ist = = = = $xy = a$

$x - y = d$

mithin = = = $x = \frac{a}{y}$

$x = d + y$

$\frac{a}{y} = d + y$

$a = dy + y^2$

(nach §. 129.) $a + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}d^2 + dy + y^2$

$\sqrt{(a + \frac{1}{4}d^2)} = \frac{1}{2}d + y$

$y = \sqrt{(a + \frac{1}{4}d^2)} - \frac{1}{2}d$

und

und da . . . . $x = d + y$ ist, wenn man den bekannten Werth vom y substituirt

$$x = \sqrt{(a + \tfrac{1}{4}d^2)} + d - \tfrac{1}{2}d. = \sqrt{(a + \tfrac{1}{4}d^2)} + \tfrac{1}{2}d$$

setzet man statt den Buchstaben die Zahlen, für welche sie genommen sind, ist

$$y = \sqrt{(a + \tfrac{1}{4}d^2)} - \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(44800 + 44)} - 12 = 212 - 12 = 200$$

$$x = \sqrt{(a + \tfrac{1}{4}d^2)} + \tfrac{1}{2}d = 212 + 12 = 224$$

Die Länge vom Parallelogram hat dahero 224 Schuh.

die Breite 200

§. CCXXIII.

Tab. II. Fig. I.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Radio eines Zirkels CB, und dem Abstande eines Punktes A, nämlich AC, die Länge der Linie AB zu finden, welche von dem Punkte A gezogen, den Zirkel berühret, oder mit demselben einen Tangenten machet.

Auflösung. Man setze

$AB = x$

$CB = r$

$AC = a$

folgsam ist, weil der Radius mit dem Tangenten allezeit einen rechten Winkel macht,

$$a^2 = x^2 + r^2$$ nach dem pythagorischen Lehrsatze,

$$a^2 - r^2 = x^2$$

$$\sqrt{(a^2 - r^2} = x$$

setzet man nun $a = 50$

$r = 30$,

ist $x = \sqrt{(2500 - 900)} = 40$.

§. CCXXIV.

§. CCXXIV.

Zusatz. Da $a^2 - r^2 = x^2$, so kann folgende Analogie oder Proporzion gemacht werden,

$$a - r : x = x : a + r \quad \text{(nach §. 162.)}$$

aus dem der Lehrsatz erhellet, daß jeder Tangent zwischen seinem Sekanten weniger dem Radio und seinem Sekanten mehr dem Radio die mittlere geometrische Proportionallinie sey.

§. CCXXV.

Fig. II.

Aufgabe. Wenn in einem Dreyecke ABC die drey Seiten bekannt sind, zu finden, in was für Theile die Basis AB durch die Perpendikulärlinie CD getheilt werde.

Auflösung. Es sey

	AB	100	$= a$
	AC	60	$= b$
	BC	80	$= c$
	CD		$= y$
	AD		$= x$
und also	BD		$= a - x$

folgsam ist nach dem pythagorischen Lehrsatz

$$b^2 - x^2 = y^2$$

und

$$c^2 - a^2 + 20x - x^2 = y^2$$

$$c^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 - x^2$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

oder in Zahlen

$$x = \frac{10000 + 3600 - 6400}{200} = 36.$$

und $a - x = 100 - 36 = 64$

§. CCXXVI.

Fig. III.

Aufgabe. Aus der gegebnen Basis und Perpendikulärlinie eines Dreyecks ABC die Länge der Linie FG zu finden, welche mit der Basis parallel lauft, und das Dreyeck in zween gleiche Theile theilet.

Auflösung. Es sey

AB, 18 $= b$,
CD, 15 $= p$,
CE $= y$,
FG $= x$,

so ist der Quadratinhalt des Dreyecks ABC

$$\frac{bp}{2}$$

und dessen Hälfte

$$\frac{bp}{4} = \frac{xy}{2}$$

oder

$$\frac{bp}{2} = xy$$

Nun weil ABC und FGC ähnliche Dreyecke sind, kann man, um y wegzubringen, folgende Analogie machen

$$p : b = y : x$$
$$by = px$$
$$y = \frac{px}{b}$$

substi=

substituirt man diesen Werth in der ersten Gleichung für y, erhält man

$$\frac{bp}{2} = \frac{px^2}{b}$$

$$\frac{b^2p}{2} = px^2$$

$$\frac{b^2}{2} = x^2$$

$$\sqrt{\frac{b^2}{2}} = x$$

das ist in Zahlen, $x = \sqrt{\frac{324}{2}} = \sqrt{162} = 12$

§. CCXXVII.

Fig. IV.

Aufgabe. In jeder geraden Linie A C den Punkt zu finden, auf welchen die beyden Lichter in A und B, die von zerschiedner Stärke sind, gleich stark hinleuchten: den physikalischen Grund vorausgesezt, daß sich die Wirkung des Lichts umgekehrt verhalte, wie das Quadrat der Entfernung, oder daß das Licht viermal heller leuchte, wenn es zweymal näher ist, und neunmal heller, wenn es dreymal näher ist rc.

Auflösung. Es sey

die Entfernung der beyden Lichter AB $= a$
die Stärke des größern Lichts im A $= n$
des kleinern im B - - $= m$
die unbekannte Weite, in welcher der Punkt D vom B weg ist $= x$
und also die Weite, in der er vom A weg ist, $a - x$

Weil man nun von beyden Lichtern eine gleiche Wirkung auf den Punkt D setzet, kann man erstlich schließen:

$$m : n = x^2 : a^2 - 2ax + x^2$$

folgsam ist

$$nx^2 = a^2m - 2amx + mx^2$$

$$nx^2 - mx^2 + 2amx = a^2m$$

$$(n-m) \cdot x^2 + 2amx = a^2m \text{ (nach §. 37.)}$$

$$x^2 + \frac{2amx}{n-m} = \frac{a^2m}{n-m} \text{ (nach §. 117.)}$$

$$x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{a^2m^2}{n-m^2} = \frac{a^2m}{n-m} + \frac{a^2m^2}{n-m^2} \text{ (nach §. 129}$$

Bringet man die Terminos vom zweyten Gliede unter einerley Benennung, welches geschieht, wenn man den Zähler und Nenner von $\frac{a^2m}{n-m}$ mit $n-m$ multiplizirt, und reduzirt sodenn das ganze Glied,

so erhält man

$$x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{a^2m^2}{n-m^2} = \frac{a^2mn}{n-m^2}$$

$$x + \frac{am}{n-m} = \pm\sqrt{\frac{a^2mn}{n-m^2}} \text{ (nach §. 128.)}$$

oder $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$.

Nimmt man also z. B. an

$$a = 6$$

$$m = 1$$

$$n = 4$$

kann

kann nach den letzten Ausdruck

$$x = -\frac{6 \cdot 1}{4-1} - \frac{6}{4-1}\sqrt{4 \cdot 1} = -6$$

oder $= -\frac{6 \cdot 1}{4-1} + \frac{6 \cdot}{4-1}\sqrt{4 \cdot 1} = 2$ seyn,

das ist, der Punkt kann um zwey dergleichen Räume, wovon Sechs AB oder *a* ausmachen, vom B gegen A, im D, oder um die Sechs Räume, das ist, um ganz *a* nach einer A entgegengesetzten Lage im C liegen: denn gegen beyde Punkte ist die Wirkung der Lichter gleich groß, weil in beyden Fällen die gesuchten Punkte vom größern Lichte A noch einmal so weit, als vom kleinern B entfernt sind, und also nothwendig für beyde Wirkungen einerley Produkt herauskommen muß, wenn man verkehrt die Stärke des größern Lichts 4 mit dem Quadrat der Entfernung des kleinern Lichts 1, und die Stärke des kleinern Lichts 1, mit dem Quadrat der Entfernung des größern Lichts 4 multiplizirt.

§. CCXXVIII.

Anmerkung. Hieraus ersieht man wiederum, daß man die negatifen Werthe in einem den positifen Werthen entgegengesetzten Verstande nehmen muß: das ist z. B. wenn man BD oder x positif setzet, so ist BC negatif oder $-x$, entgegen sezt man BC oder x positif, so wird BD negatif oder $-x$, wie jeder findet, wenn er $a - x$ oder der Entfernung des Punkts D vom A die Entfernung in der verlängerten Linie AC, $a - x$ annimmt, und wieder nach voriger Aufgabe verfährt: auch, daß die

negatifen Werthe kein wirkliches Nichts, vielminder weniger, als Nichts seyen.

§. CCXXIX.

Erklärung. Eine unbestimmte Aufgabe wird insgemein diejenige genennt, die mehr als eine Auflösung hat, wie eine Frage, auf die man mehr, als eine Antwort geben kann, z. B. wenn man zwey Zahlen will, deren Summe $= 12$, das ist $x + y = 12$, so ist $x = 12 - y$. Man kann also für y setzen, was man für eine Zahl will, wenn sie nur kleiner als 12 ist: z. B. $x = 12 - 8$, oder $12 - 5$, oder $12 - \frac{1}{2}$ u. s. w. denn $4 + 8 = 12$, $7 + 5 = 12$, $11\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 12$. u. s. w.

§. CCXXX.

Aufgabe. Drey Zahlen zu finden, welche einerley Differenz, und zu ihrer Summe 135 haben.

Auflösung. Es seyen die drey Zahlen x, y, z, $135 = a$, so ist

der Bedingnisse

$$x + y + z = a, \text{ und } x - y = y - z$$

$$x = 2y - z$$

substituirt man diesen Werth vom x in der ersten Gleichung, ist

$$x + y + z = 2y - z + y + z = 3y = a$$

$$y = \frac{a}{3} = 45$$

und also $x + 45 + z = 135$

$$x + z = 135 - 45 = 90$$

eine

eine Gleichung, in der weder x noch z kann weggebracht werden, wenn man nicht für eines aus beyden einen gewissen Werth setzet: man sezt dahero z. B.

$$x = 20$$

so ist $$20 + z = 90$$

$$z = 90 - 20 = 70$$

und durch diese Zahl ist die Aufgabe aufgelöset, weil $$20 + 45 + 70 = 135$$
und die Differenz einerley, nämlich 25 ist.

§. CCXXXI.

Anmerkung. z. B. hätte man gesezt

$$x = 30,$$

so wäre $$z = 95 - 30 = 65$$

und die Zahlen

30, 45, 65,

und die Aufgabe wäre noch nicht aufgelößt, weil nur die Summe, nicht aber die gleiche Differenz erhalten ist, doch könnte man sie auf zerschiedne Weise auflösen. z. B. wenn man die Differenz d nennet, so ist

$$30 + (30 + d) + (30 + 2d) = 135$$

$$3d = 135 - 90 = 45$$

$$d = \frac{45}{3} = 15$$

mithin $$x = 30,\ y = 45,\ z = 60.$$

VIII. Abtheilung.

Anwendung der Algebra auf die Kegelschnitte.

§. CCXXXII.

Erklärung.

Fig. V.

Wenn man einen Kegel ABC durch eine Fläche so schneidet, daß der Schnitt DEI mit einer Seite des Kegels BC parallel gehet, entstehet aus solchem Schnitte eine Parabel.

Fig. VI.

Wird der Kegel schief so geschnitten, daß der Schnitt auf beyden Seiten durchgehet, wie AEBF, kömmt eine Elipsis heraus.

Fig. VII.

Schneidet man den Kegel also, daß die verlängerte Linie DE die mitten durch den Schnitt DEG geht, mit der verlängerten Seite CB zusamm läuft, entstehet aus solchem Schnitte eine Hyperbel.

§. CCXXXIII.

Fig. V.

Erklärung. Die geraden Linien HK, DI, die in einem Kegelschnitte mit der Basis des Kegels parallel gezogen werden, werden Ordinaten, und

die

die Linie E G, welche durch den ganzen Kegelschnitt gehet, und alle Ordinaten winkelrecht in zwey gleiche Theile theilet, wird die Axe genennt.

Theilet die Linie E G die Ordinaten nicht winkelrecht in zween gleiche Theile, nennt man sie den Diameter.

Die Theile der Axe EF, ER, die von dem Scheitel, oder Anfang der Axe oder E, bis zu den Ordinaten HK, QS gehen, heißen die Abszissen, und die halbe Ordinaten GI, RS, FK Semiordinaten.

Endlich nennt man die Abszissen und Ordinaten zusamm Koordinaten, als z. B. EF, HK.

§. CCXXXIV.

Erklärung. Veränderliche Größen sind, welche größer oder kleiner werden, sobald andere Größen größer oder kleiner werden.

Unveränderliche Größen sind, welche nicht größer noch kleiner werden, es mögen die veränderliche Größen so groß oder klein werden, als sie wollen. z. B.

Fig. VIII.

In einem Zirkel ABD werden die Semiordinaten ER, PM, QN um so größer, als größer die Abszissen AR, AP, AQ werden, bis man auf dem Mittelpunkt C hinkömmt, und die Abszissen werden kleiner, sobald die Semiordinaten kleiner werden: folgsam sind die Semiordinaten und Abszissen veränderliche Linien.

Entgegen der Diameter AB und der Radius CD bleiben immer in einerley Größe, es mögen die Abszissen und Semiordinaten kleiner oder größer werden,

 folg=

folgsam ist der Diameter und Radius eines Zirkels eine unveränderliche Größe.

§. CCXXXV.

Anmerkung. Der Buchstab x bedeutet insgemein die Abszisse, y die Semiordinate, wenn nicht etwas besonders dabey erinnert wird.

Der Parameter ist eine beständige Linie, welche a und b genennet wird. Nun wollen wir die Kegelschnitte zuerst außer dem Kegel, zulezt aber in dem Kegel selbst betrachten.

Von der Parabel.

§. CCXXXVI.

Erklärung. Wenn die Koordinaten rechtwinklicht sind, und wenn man für den Parameter a setzet, so heißet die krumme Linie, in welcher $ax = y^2$ ist, die Parabel.

§. CCXXXVII.

Zusatz. Weil also in der Parabel $ax = y^2$ ist, so verhält sich $x : y = y : a$ (nach §. 168.) folgsam ist y oder die Semiordinate einer Parabel die mittlere geometrische Proporzionallinie zwischen x oder der Abszisse, und der Parameter a; und der Parameter a, die dritte Proporzionallinie zur Abszisse x und Semiordinate y.

§. CCXXXVIII.

Anmerkung. Man pfleget aber den Parameter bey krummen Linien selten auszudrücken, sondern man läßt ihn weg, oder stellet solchen nur als eine gerade Linie vor, welche mit der Axe der krummen Linie AR bey dem Scheitel A einen rechten Winkel

macht,

macht, oder verlängert die Axe über die Scheitel A in B, also, daß AB die Größe des Parameters ausdrückt.

§. CCXXXIX.

Fig. IX.

Zusatz. Setzet man nun, daß AB der Parameter sey, AR die Axe, so kann man jeden Punkt der Parabel geometrisch bestimmen, wenn man auf die Axe eine Perpendikularlinie AD errichtet, über BP einen halben Zirkel beschreibet, und PM = AN machet; denn wenn AB = a, AP = x ist, so ist PM = y = AN die mittlere Proporzionalgröße zwischen a und x, wie aus der gemeinen Geometrie bekannt ist, und also $ax = y^2$, und nach §. 237. der Punkt M in der Parabel.

§. CCXL.

Zusatz. Setzet man

$$x = a$$

so ist

$$a \cdot x = a^2$$

$$y^2 = a^2$$

$$y = a$$

folgsam ist auch die Semiordinate gleich dem Parameter, wenn die Abszisse dem Parameter gleich ist.

§. CCXLI.

Erklärung. Der Brennpunkt ist derjenige Punkt der Axe einer krummen Linie, wo die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist.

§. CCXLVIII.

Lehrsatz. Wenn man die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel BC = AB, und vom A aus eine mit der Semiordinate parallele Linie AH machet, auf diese aber aus E die Linie ED senkrecht, oder mit der Axe AR parallel, und von dem Brennpunkte C eine gerade Linie CD durch GE zieht, so ist die Linie EG, welche im I mitten durch die Linie DC läuft, der Tangent von dem Punkte der Parabel E, oder die Linie, welche nur den Punkt E berührt. Denn weil HE = AK = BK + AB = $x + \frac{1}{4}a$ = CE, und DI (wie man sezte) = IC, IE aber beyden Dreyecken DEI und CEI gemein ist, so ist CIE = HIE ein rechter Winkel, folglich sind auch DIf = CIf, und DIF = CIF gleichschenkelchte Dreyecke, und es ist fD = fC und FD = FC.

Da aber wegen dem rechten Winkel Dhf, und DHF, fh = fC allezeit kleiner als fD, und FH = FC kleiner, als FD ist. Es mögen f und F noch so nahe bey E seyn, so sind die Punkte in der Linie FG, F und f nicht mehr in der Parabel, weil sonst die Linie hf genau = fC und HF genau = FC seyn mußte. Daher kann außer E kein Punkt in der Linie GF, der ober E, wie f, oder unter E, wie F ist, in die Parabel fallen: woraus denn folgt, daß nur der Punkt E übrig bleibe, den die Linie EG berührt, oder daß EG der Tangent von dem Punkt E sey.

§. CCXLIX.

Zusatz. Weil DE mit CR, und DC mit ER parallel geht, indem DC und CR auf EG winkelrecht

kelrecht sind, wie auch DE und AR auf AD, und also DC=ER ist, so ist das Dreyeck ERK ähnlich und gleich dem Dreyeck ACD, folgsam AC =RK, und also, da AC=$\frac{1}{2}a$ oder dem halben Parameter gleich ist, ist auch RK=$\frac{1}{2}a$, das ist, die Subnormallinie ist eine beständige Linie, welche dem halben Parameter gleich ist.

§. CCL.

Zusatz. Da wegen dem rechten Winkel GER, und dem gemeinschaftlichen Winkel EGR die Dreyecke EKR und EGK ähnlich sind, so verhält sich

$$KR : EK = EK : GK$$

$$\frac{1}{2}a : y = y : GK$$

$$\frac{2y^2}{a} = GK$$

also ax substituirt für y^2, ist

$$\frac{2ax}{a} = 2x = GK$$

folgsam ist in einer Parabel der Subtangent doppelt so groß, als die Abszisse.

§. CCLI.

Lehrsatz. Wenn man mit GR durch E eine Parallellinie SE ziehet, so ist CEG gleich dem Winkel FES. Weil SE mit GK parallel gehet, so ist der Winkel EGC gleich dem Winkel GED, und dieser seinem Vertikalwinkel FED, es ist aber GED oder IED=IEC, weil dieß die gleichnämige Winkel in den einander gleichen, und ähnlichen Dreyecken IED und IEC sind: folglich ist auch FES=IEC oder GEC.

§. CCXLII.

Tab. III. Fig. X.

Lehrsatz. Der Brennpunkt in der Parabel ist um den vierten Theil des Parameters von dem Scheitelpunkte entfernet. Oder wenn F der Brennpunkt der Parabel ist, so ist AF gleich dem vierten Theile des Parameters.

Beweis. $ax = y^2$

$y = \frac{1}{2}a$ (nach §. 241.)

folgsam $ax = \frac{1}{4}a^2$: a (nach §. 115.)

$x = \frac{1}{4}a$

§. CCXLIII.

Zusatz. Die Differenz zwischen der Abszisse AP oder x, und der Abstand des Scheitelpunkts AF oder $\frac{1}{4}a$, ist also $x - \frac{1}{4}a = PF$.

§. CCXLIV.

Zusatz. Da $PF = x - \frac{1}{4}a$,

so ist $PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$

$PM^2 = ax$ folgsam addirt

$PM^2 + PF^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$. $\surd$

$\surd(PM^2 + PF^2) = x \frac{1}{4}a$,

und da nach dem pythagorischen Lehrsatze

$\surd(PM^2 + PF^2) = FM$ ist,

so ist $FM = x \frac{1}{4}a$,

mithin ist jede gerade Linie FM, die vom Brennpunkte bis zur Krümmung der Parabel gezogen wird, der Abszisse AP und der Distanz des Brennpunkts von dem Scheitel AF zusammen gleich.

§. CCXLV.

Fig. XI.

Zusatz. Wenn man dahero $AC = AF$ oder $= \frac{1}{4} a$ machet, und auf die Axe AX Perpendikulärlinien PM, QN, RO setzet, können alle Punkte bestimmet werden, wenn man mit dem Zirkel CM, CN, CO nimmt, und auf F, CM in P, CN in Q, CO in R trägt.

§. CCXLVI.

Anmerkung. Noch leichter geschieht aber die Bestimmung aller Punkte in einer Parabel, wenn man in C ein Linial DE befestiget, das mit CA einen rechten Winkel macht, und in dem Ende eines andern Linials GL, (welches ein Schenkel eines Winkelhaken ist) nämlich im L, wie auch im F einen Faden anbindet, der so groß als CX ist, und sodann mit einem Stifte S ohne Wanken deu Faden an dem Linial GL hält, und mit diesem mit der Axe parallel vom C bis in E nach und nach hinauf fährt, werden dadurch alle Punkte der Parabel angemerket, weil bey allen diesen Punkten die gerade Linie FS von dem Brennpunkte bis zu der Krümmung der Parabel $= x + \frac{1}{4} a$ ist (nach §§. 244. u. 245.)

§. CCXLVII.

Fig. XII.

Erklärung. Wenn die Krümmung der Parabel durch eine gerade Linie FG in einem Punkte E berührt wird, so heißt GE der Tangent, GK der Subtangent, ER die Normallinie, die auf EG perpendikulär stehet, und KR die Subnormallinie, eben so benennt man diese Grade bey andern krummen Linien.

§.

§. CCLII.

Anmerkung. Da aus der Optik erwiesen ist, daß bey den Spiegeln der Inzidenzwinkel von den Sonnenstralen gleich seye dem Reflexionswinkel, und da der Winkel FES allezeit dem Winkel CEG gleich ist, so ersieht man hieraus leicht, daß in parabolischen Spiegeln alle Stralen SE, die mit der Axe parallel gehen, im C reflektirt und versammelt werden, und warum also in dem Punkt C sie eine so große Wirkung im Brennen erzeigen.

§. CCLIII.

Lehrsatz. Die Abszissen der Parabel verhalten sich gegeneinander, wie die Quadrate der respondirenden Semiordinaten.

Fig. XI.

Beweis. (nach §. 236.)

$AM.a = PM^2$, und $AO.a = RO^2$

folgsam

$$a : \frac{AM.a : AO.a = PM^2 : RO^2}{AM : AO = PM^2 : RO^2}$$

§. CCLIV.

Zusatz. Dahero auch

$$\sqrt{AM} : \sqrt{AO} = PM : RO$$

oder die Semiordinaten verhalten sich, wie die Quadratwurzeln ihrer Abszissen.

Von der Elipsis.

§. CCLV.

Fig. XIII.

Erklärung. Die Elipsis ist eine konische Sektion oder krumme Linie, in welcher sich das Quadrat der Semiordinate PM verhält zu dem Rektangulo aus den zwey Theilen der größern Axe (AP . BP) wie sich verhält der Parameter zur größern Axe. Oder wenn man die größere Axe a, den Parameter b, ein Theil der Axe AP, x, den andern BP, $a-x$ nennet, so ist die Elipsis eine krumme Linie, in der

$$y^2 : (a-x) . x = b : a$$

$$ay^2 = abx - bx^2 \quad : a$$

oder auch, weil

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$$

in der das Quadrat der Semiordinate y^2 gleich ist dem Rektangulo aus dem Parameter in die Abszisse bx weniger dem Produkt aus dem Quadrat der Abszisse in den durch die größere Axe dividirten Parameter $-\frac{bx^2}{a}$

§. CCLVI.

Erklärung. Wenn die größere Axe AB im C in zween gleiche Theile getheilt wird, so heißt der Punkt C der Mittelpunkt, und die Semiordinate vom C aus doppelt genommen, oder 2DC die kleinere Axe.

§. CCLVII.

Zusatz. Da die Abszisse $x = \frac{1}{2}a$, wenn $y = CD$, oder wenn die Semiordinate der halben kleinern Axe gleich

gleich ist, darf man in der Gleichung $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ nur für x überall $\frac{1}{2}a$ setzen, so hat man die kleinere Axe. Denn so ist

$$y^2 = \tfrac{1}{2}ba - \tfrac{1}{4}\frac{ba^2}{a} = \tfrac{1}{2}ba - \tfrac{1}{4}ba = \tfrac{1}{4}ba$$

und $$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ba}$$

folgsam $$2y = \sqrt{ba}$$

das ist, die kleinere Axe ist die mittlere geometrische Proporzionallinie zwischen dem Parameter und der größern Axe.

§. CCLVIII.

Zusatz. Wenn man die kleinere Axe $2y = c$ setzet, so ist $c = \sqrt{ba}$, $c^2 = ba$, $\frac{c^2}{a} = b$

substituirt man den Werth vom b

in $$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$$

so ist $$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

und wenn man $c = a$ setzet, und a für c in dieser lezten Gleichung substituirt,

ist $$y^2 = ax - x^2$$

eine Gleichung für den Zirkel, in welchem $a = b = c$, das ist, der Parameter und die beyden Axen, einander gleich sind.

§. CCLIX.

Aufgabe. Den Brennpunkt in einer Elipsis zu finden, das ist, dessen Entfernung von dem Mittelpunkt oder Scheitel der Elipsis.

Auf-

Auflösung. Weil bey dem Brennpunkt die Semiordinate gleich ist dem halben Diameter oder

ist $\frac{y = \frac{1}{2} b}{y^2 = \frac{1}{4} b^2}$ (nach §. 241.)

folgsam da in der Elipsis

$$y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$$

so ist $\frac{1}{4} b^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$

$$\frac{1}{4} ab^2 = abx - bx^2 \quad \cdot a$$

$$\frac{1}{4} ab = ax - x^2 \quad : b$$

$$x^2 - ax = \frac{1}{4} ab$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab$$

$$x - \frac{1}{2} a = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - ab)}$$

$$x = \frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - ab)}$$

setzen wir nun, es sey

$$Df = \tfrac{1}{2} a,$$

so ist

$$DF^2 = \tfrac{1}{4} a^2,$$

und weil

$$CD = \tfrac{1}{2} \sqrt{ab}$$ (nach §. 257.)

und also

$$CD^2 = \tfrac{1}{4} ab,$$

und

$$Df^2 = CD^2 + Cf^2$$

folglich $Df^2 - CD^2 = Cf^2$

 so

so ist

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab = Cf^2}{\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ab)} = Cf} \quad \text{und}$$

Also ist im f der Brennpunkt, und die Entfernung des Brennpunktes von dem Mittelpunkt der Elipsis ist gleich der Quadratwurzel von der Differenz der Quadraten der beyden halben Axen.

§. CCLX.

Zusatz. Weil

$$x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ab)}$$

und also

$$Cf = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - ab)} \text{ ist,}$$

so muß die Elipsis zween von dem Mittelpunkt gleich weit entfernte und entgegengesezte Brennpunkte fF haben.

§. CCLXI.

Anmerkung. Will man die Entfernung des Brennpunkts von dem Scheitel wissen, darf man nur noch $\frac{1}{2}a$ addiren.

§. CCLXII.

Lehrsatz. Die Quadrate der Semiordinaten verhalten sich, wie die Produkte aus den Segmenten der Axe.

Fig.

Fig. XIII.

Beweis. Es sey

$AP = x,\ Ap = u,\ PM = y,\ pm = z$

so ist

$$y^2 = \frac{abx - bx^2}{a}$$

$$z^2 = \frac{abu - bu^2}{a} \quad \text{(nach §. 158.)}$$

folgsam

$$z^2 : y^2 = \frac{(abu - bu^2)}{a} : \frac{(abx - bx^2)}{a}$$

$$= (abu - bu^2) : (abx - bx^2) \;.\; a$$

$$= (au - u^2) : (ax - x^2) \;:\; b$$

$$= (a - u)\, u : (a - x) \,.\, x$$

§. CCLXIII.

Lehrsatz. Weil also

$$DC^2 : PM^2 = (AC . CB) : (AP . BP)$$

oder, da

$$= AC = BC,$$

$$DC^2 : PM^2 = AC^2 : (AP . BP)$$

$$AC^2 : DC^2 = (AP . BP) : PM^2,$$

so verhält sich das Quadrat der halben größern Axe, zu dem Quadrat der halben kleinern Axe, wie das Produkt aus den beyden Segmenten der größern Axe PA, BP, sich verhält zum Quadrat der korrespondirenden Semiordinate PM^2.

§. CCLXIV.

Zusatz. Setzet man $FC = fC = e$, $PA = x$
so ist

$$PB = a - x$$

folgsam

$$AC^2 : DC^2 = (PA.PB) : PM^2$$

oder, da

$$AC^2 = \tfrac{1}{4}a^2,\ DC^2 = \tfrac{1}{4}ab \text{ (nach §. 157.)}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}ab = (ax - x^2) : PM^2$$

und weil

$$DC^2 = FD^2 - FC^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - e^2 \text{ (nach §. 259)}$$

so ist auch

$$\tfrac{1}{4}a^2 : (\tfrac{1}{4}a^2 - e^2) = (ax - x^2) : PM^2$$

$\tfrac{1}{4}a^2 :$

$$1 : 1 - \frac{4e^2}{a^2} = (ax - x^2) : PM^2$$

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$

§. CCLXV.

Lehrsatz. Die Summe zwoer gerader Linien, die von dem nämlichen Punkt der Peripherie bis zu den zween Brennpunkten gehen, ist gleich der ganzen größern Axe.

Beweis. Denn, es sey wiederum

$$FC = fC = e,\ AP = x,$$

so ist

$$PC = \tfrac{1}{2}a - x,\ PF = FC - PC = e - \tfrac{1}{2}a + x$$

$$Pf = fC + PC = e + \tfrac{1}{2}a - x$$

folg=

folgsam

$$PF^2 = e^2 - ae + \frac{1}{4}a^2 - ax + 2ex + x^2$$

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$ (nach §. 264.)

und weil

$$PF^2 + PM^2 = FM^2$$

$$FM^2 = e^2 - ae + \frac{1}{4}a^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$ √

$$FM = \frac{1}{4}a - e + \frac{2ex}{a}$$

eben so ist

$$PF^2 = e^2 + ae + \frac{1}{4}a^2 - ax - 2ex + x^2$$

$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$

und da

$$Pf^2 + PM^2 = fM^2$$

$$fM^2 = e^2 + ae + \frac{1}{4}a^2 - 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$ √

$$fM = \frac{1}{2}a + e - \frac{2Cx}{a}$$

$$FM = \frac{1}{2}a - e + \frac{2Cx}{a}$$

$$FM + fM = a$$

§. CCLXVI.

Zusatz. Wenn dahero die größere und kleinere Axe gegeben sind, kann man sehr leicht eine Elipsis beschreiben, da man (nach §. 259.) die beyde Brennpunkte F und f suchet, sodann in solche zwey Stifte befestiget, und einen Faden zu beyden Enden daran bindet, der so groß als die größere Axe AB ist, darauf mit einem Bleystifte den Faden in etwas anspannet, und zu beyden Seiten von einem Ende der Axe A bis zum andern B unter stetem Spannen herumfährt.

Von der Hyperbel.

§. CCLXVII.

Erklärung. Die Hyperbel ist eine konische Sektion, oder krumme Linie,

in der

$$ay^2 = abx + bx^2$$

und also $b : a = y^2 : (ax + x^2)$

das ist: die Hyperbel ist eine krumme Linie, in der sich der Parameter b verhält zur Axe a, wie sich verhält das Quadrat der Semiordinate y^2 zu dem Produkt aus der Abszisse x in die Summe von der Abszisse und Axe $a + x$,

oder auch, weil

$$ay^2 = abx + bx^2 \quad : a$$

in der $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$

 §. CCLXVIII.

§. CCLXVIII.
Fig. XIV.

Wenn man in der Gleichung der Elipsis (§.255) die Axe $-a$ statt $+a$ sezet, so erhält man die nämliche lezte Gleichung für die Hyperbel. Man kann also die Hyperbel für eine Elipsis von einer negatifen Axe ansehen, oder in der die Axe AB der Axe AL auf der entgegengesezten Seite ist (nach §. 228.)

Insonderheit wird die Axe $AB = a$ die Queraxe genennt.

§. CCLXIX.

Zusatz. Nimmt man bey der Gleichung für die kleinere oder konjungirte Axe der Elipsis (§. 257.) $2y = \sqrt{ab}$, die Axe a wiederum negatif an, so ist $2y = \sqrt{-ab}$ und $y = \frac{1}{2}\sqrt{-ab}$, das ist y ist eine unmögliche Größe: folgsam giebt es auf der Queraxe keine Semiordinaten.

§. CCLXX.

Zusatz. So aber die Abszisse negatif größer genommen wird, als die Queraxe, so giebt es auf der entgegengesezten Seite wiederum Ordinaten. Denn wenn die beyde Faktores x und $a+x$ negatif genommen werden, geben selbe ein positifes Produkt $y^2 = \frac{bx}{a}.(a+x)$ und folgsam kann die Hyperbel, weil x positif und negatif als eine veränderliche Größe unendlich wachsen kann, vier unendlich große entgegengesezte Schenkeln haben.

§. CCLXXI.

Erklärung. Wenn man die Quer-Axe A B im C in zween gleiche Theile theilet, so heißt der Punkt C der Mittelpunkt der Hyperbel.

§. CCLXXII.

Zusatz. Suchet man dahero durch die Gleichung für die Hyperbel den Brennpunkt (nach §. 259.) so findet man selben $= -\frac{}{+}\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+ab)}$

§. CCLXXIII.

Zusatz. Und wenn man mit der Gleichung der Hyperbel, als mit einer Elipsis von einer negatifen Axe (nach §. 26-.) verfährt, findet man, daß kraft des entgegengesezten fM — FM $= a$, oder daß die Queraxe allzeit gleich der Differenz zwischen den zween Linien seye, die aus den Punkten f, F auf einem Punkt der Hyperbel M gezogen werden.

§. CCLXXIV.

Erklärung. Wenn man die konjungirte Axe D E senkrecht auf die Queraxe BA durch die Scheitel der Hyperbel A zieht, so ihr Mittelpunkt in A fällt, und aus dem Mittelpunkt der Queraxe C zwo gerade Linien CR, Cr durch D und E zieht, so heißt man diese die Asymtoten der Hyperbel, welches so viel sagen will, als nicht berührende. Die Ursache dieser Benennung werden wir gleich sehen.

§. CCLXXV.

Lehrsatz. Die Asymtoten können niemals völlig zu den Schenkeln der Hyperbel kommen.

Beweis. Denn, weil C der Mittelpunkt ist,

so ist

$$CA = \frac{1}{2}a,$$

$$CP = CA + AP = \frac{1}{2}a + x,$$

und weil die kleinere Axe $DE = \sqrt{ab}$,

so ist die halbe kleinere Axe

$$DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$$

folgsam, da CPR, und CAD ähnliche Dreyecke sind, ist

$$CA : AD = CP : PR$$

$$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}a + x : PR,$$

und dahero

$$PR = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{a}$$

mithin wenn man wirklich quadrirt

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + \frac{bx^2}{a}$$

$$PM^2 = \frac{bx + bx^2}{a} \quad \text{(nach §. 267.)}$$

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab$$

$$PR - PM = \frac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

Da nun

$$PR - PM = RM$$

so bleibt zu dem Raum zwischen Asymtoten und Schenkeln RM immer eine beständige Größe übrig.

§. CCLXXVI.

Erklärung. Das Quadrat der geraden Linie AI, das vom Scheitel aus mit der Seite DC parallel gezogen wird, nennt man die Potenz der Hyperbel.

§. CCLXXVII.

Lehrsatz. Die Potenz der Hyperbel ist der sechszehnte Theil von der Summe der Quadraten beyder Axen.

Beweis. Denn

$$CA^2 = \tfrac{1}{4}a^2,\ AE^2 = \tfrac{1}{4}ab$$

folgsam $$CE^2 = AC^2 + AE^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab$$

$$CE = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab)}.$$

Da nun vermög der Konstruktion

$$EI = \tfrac{1}{2}CE \text{ ist,}$$

so ist

$$CI = \tfrac{1}{2}CE = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab)}$$

und quadrirt

$$CI^2 = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}ab) = \frac{a^2 + ab}{16}$$

§. CCLXXVIII.

Aufgabe. Aus der gegebenen Querare A B, und dem gegebnen Parameter, jeden Punkt in der Hyperbel, und also die Krümmung der Hyperbel zu finden.

Fig. XV.

Auflösung. Man verlängere beyderseits die Querare A B, und beschreibe vom Mittelpunkt C aus so viele konzentrische halbe Zirkel D Q G, K R L, als man Punkte in der Hyperbel bestimmen will, errichte die Perpendikulärlinie B F, die in den Punkt I N g: von den halben Zirkeln D I G, K N L wird durchschnitten werden, und suche zu der Querare *a* den Parameter *b*, und zu dem Quadrat der Linie B I die vierte geometrische Proporzionalzahl, ziehe sodenn

aus

aus derselben die Quadratwurzel, und träget die durch die Quadratwurzel angezeigte Linie von G perpendikulär in H, so ist H ein Punkt.

Eben so sucht man wiederum bey den zweyten und übrigen halben Zirkeln die Punkte M, so wird die krumme Linie, die man durch alle diese Punkte zieht, eine Hyperbel.

Beweis. Man setze jede Abszisse AD und BG, x, so ist, weil $AB = a$,

$$BD = a + x$$

und also

$$BG = BI = BBI : BD$$
$$x : BI = BF : a + x$$
$$BF^2 = ax + x^2$$

Man setze ferner den Parameter b, die Semiordinate $GH = y$.

Nun weil $a : b = ax + x^2 : y^2$ (nach §. 267.)

das ist,

$$a : b = BI^2 : GH^2$$

so ist dann

$$GH = \sqrt{\frac{BI^2 . b}{a}}$$

folgsam ist H in dem Punkt der Hyperbel.

Auf gleiche Weise kann man es bey den übrigen halben Zirkeln beweisen, und dahero muß die Linie, die durch die Punkte H, M gezogen wird, eine Hyperbel werden.

§. CCLXXIX.

Lehrsatz. In der Hyperbel verhalten sich die Quadrate der Semiordinaten, wie sich verhalten die Produkte von der Summe der Quer-

axe

axe und Abszisse in die nämliche korrespondirende Abszisse.

Fig. XIV.

Beweis. Denn es sey
$AP = x$, $AL = u$, $PM = y$, $LS = z$.

so ist

$$ay^2 = abx + bx^2$$
$$az^2 = abu + bu^2 \quad \text{(nach §. 267.)}$$
$$y^2 = \frac{abx + bx^2}{a}$$
$$z^2 = \frac{abu + bu^2}{a}$$

und also

$$y^2 : z^2 = \frac{abx + bx^2}{a} : \frac{abu + bu^2}{a}$$
$$= abx + bx^2 : abu + bu^2$$
$$= ax + x^2 : au + u^2$$
$$= (a + x)\,x : (a + u)\,u$$

§. CCLXXX.

Anmerkung. Da bey diesen drey Arten Kegelschnitten die Verhältnisse, welche die Quadrate ihrer Semiordinaten gegeneinander haben, und durch welche sie eben untereinander entschieden sind, blos aus den Erklärungen in algebraischen Ausdrücken sind hergeleitet worden, so wirds nicht überflüßig seyn, wenn man noch zeiget, daß bey den Kegelschnitten die Semiordinaten auch die Verhältnisse haben,

haben, und daß sie also wirklich solche krumme Linien sind, wie sie durch vorgehende algebraische Ausdrücke sind erkläret worden.

§. CCLXXXI.

Tab. II. Fig. V.

Lehrsatz. Wenn man einen Kegelschnitt ABC durch eine Fläche so schneidet, daß der Schnitt DEI mit einer Seite des Kegels BC parallel gehet, entstehet aus solchem Schnitte eine Parabel.

Beweis. Man stelle sich vor, der Kegel ABC seye durch eine mit der Basis parallel gehende Fläche LH, MK durchschnitten, welche also, wie die Basis einen Zirkel formiret, und daß mit dessen Diameter eine Linie NO parallel gezogen sey: folgsam NO, LM, AC miteinander parallel gehen, so sind die Dreyecke AGE, LFE ähnlich: und weil EG mit BC ebenfalls parallel gehet, die Linien NO, FM, GC einander gleich.

Setzet man nun

$$NO = MF = CG = a,\ EF = x,\ EG = z,$$

$$HF = y,\ DG = u,$$

und daß die Semiordinate HF, DG auf den Diametern LM und AC perpendikulär stehen, so ist vermög der Eigenschaft des Zirkels

$$y^2 = LF \cdot FM$$

und

$$z^2 = AG \cdot CG$$

und

und folglich verhalten sich

$$z^2 : y^2 = CG \cdot AG : MF \cdot LF, \text{ ingleichen}$$
$$AG : LF = EG : EF \text{ und also}$$
$$\overline{AGz^2 : LFy^2 = CG \cdot EG \cdot AG : MF \cdot EF \cdot LF}$$
(nach §. 172.)
$$\overline{z^2 : y^2 = CG \cdot EG : MF \cdot EF} \; AG : LF$$

das ist, wenn man für die Buchstaben ihren Werth setzet,

$$z^2 : y^2 = au : ax$$

Aus dem man siehet, daß sich die Quadrate der Semiordinaten bey diesem Kegelschnitte verhalten, wie die Produkte aus dem Parameter in ihre korrespondirende Abszissen, und daß er also eine Parabel sey.

§. CCLXXXII.

Fig. VI.

Lehrsatz. Wenn ein Kegel schief so geschnitten wird, daß der Schnitt auf beyden Seiten durchgehet, wie AEBF, entstehet aus solchem Schnitte eine Elipsis.

Beweis. Man stelle sich wieder zwey mit der Basis des Kegels parallele Zirkel LHDK und CEMF vor, auf deren Diametern LD, CM, die Semiordinate HI, EG perpendikulär stehen,

und setze

$$AB = a,\ HI = y,\ EG = z,\ AI = x,\ AG = a - u,$$

so ist

$$BI = a - x,\ BG = a - u,$$

und wie vorher

$$LI \cdot DI = y^2,\ CG \cdot MG = z^2$$

Da

Da nun wegen den Parallel-Linien LD, CM die zwey Dreyecke CAG und LIA, wie auch die zwey Dreyecke DBI und MBG ähnlich sind,

so verhält sich

$$CG : LI = AG : AI$$

und wiederum

$$MG : DI = BG : BI$$

(nach §. 172.)

$$CG.MG : LI.DI = AG.BG : AI.BI$$

oder wie

$$z^2 : y^2 = u\,(a - u) : x\,(a - x)$$

wenn man statt der großen Buchstaben ihren Werth setzet.

Also ist bewiesen, daß dieser Kegelschnitt eine Elipsis sey. (nach §. 262.)

§. CCLXXXIII.

Fig. VII.

Lehrsatz. Wenn man einen Kegel also schneidet, daß die verlängerte Linie DE, die mitten durch den Kegelschnitt gehet, mit der verlängerten Seite zusammenläuft, entstehet aus solchem Schnitte eine Hyperbel.

Beweis. Man stelle sich gleichfalls vor, daß der Zirkel LHMK mit der Basis parallel gehe, und daß die Semiordinate HI, FE auf den Diametern LM, AC perpendikulär stehen.

Man setze ferner

$$HI = y,\ EF = z,\ PD = a,\ DI = x,\ DE = u,$$

so ist

$$PI = a + x,\ PE = a + u,$$

Nun

Nun ist wiederum

$$LI \cdot LM = y^2 \text{ und } AE \cdot CE = z^2$$

und weil wegen den Parallel-Linien AC, LM die zwey Dreyecke CPE und LDI ähnlich sind,

so verhält sich

$$CE : MI = PE : PI \quad \text{ingleichen}$$
$$AE : LI = DE : DI \quad \text{also auch}$$
$$AE \cdot CE : LI \cdot MI = DE \cdot PE : DI \cdot PI$$

oder substituirt

$$z^2 : y^2 = u\,(a + u) : a\,(a + x)$$

folgsam siehet man wiederum, wenn man diesen Ausdruck mit §. 279. vergleichet, daß dieser Kegelschnitt eine Hyperbel seyn.

Tab. I.

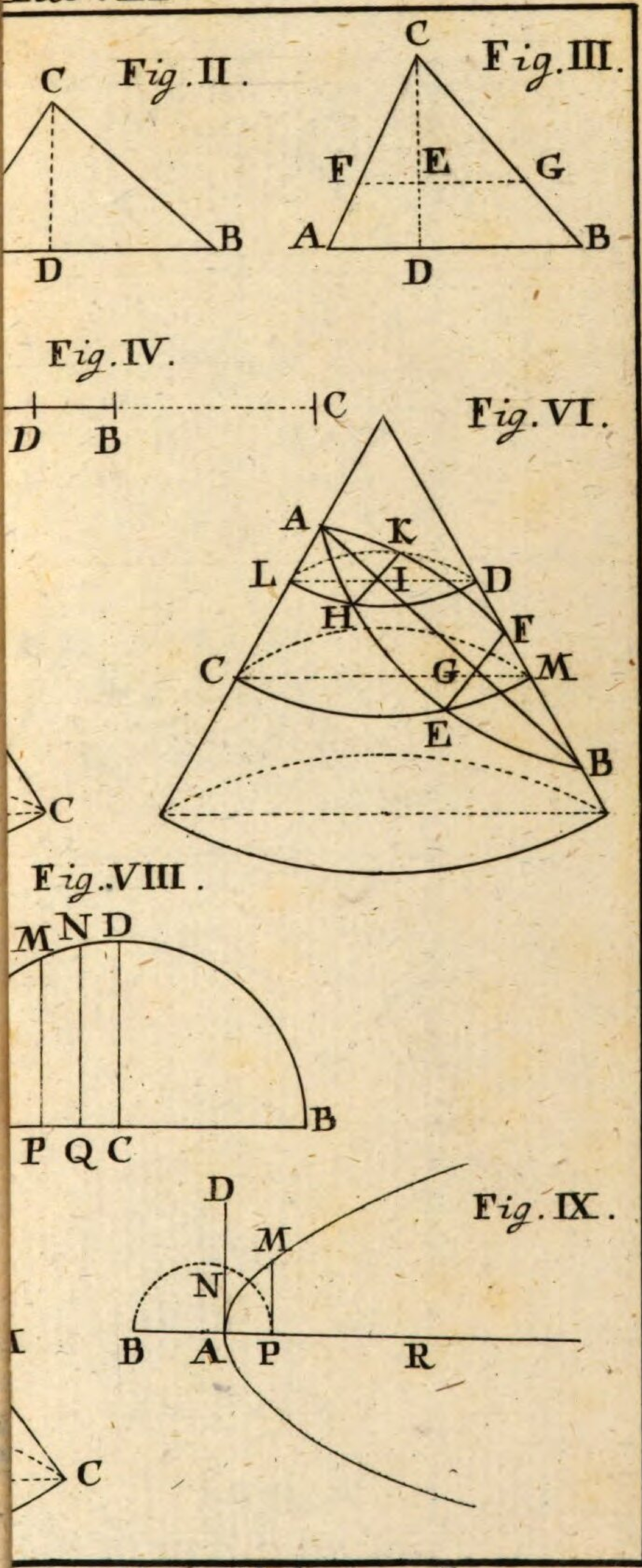
adrat

b^3	Kubus			
$ab^3 +$	b^4	IV. Grade.		
$a^2b^3 +$	$5\,ab^4 +$	b^5	V. Gr:	
$a^3b^3 +$	$15\,a^2b^4 +$	$6\,ab^5 +$	b^6	VI. Gr:

Poten=zen vom

Fecit W.V. Jocher, Ingenieur.

Tab. II.



Fecit W.V. Jocher, Ingenieur.

Fig. XI.

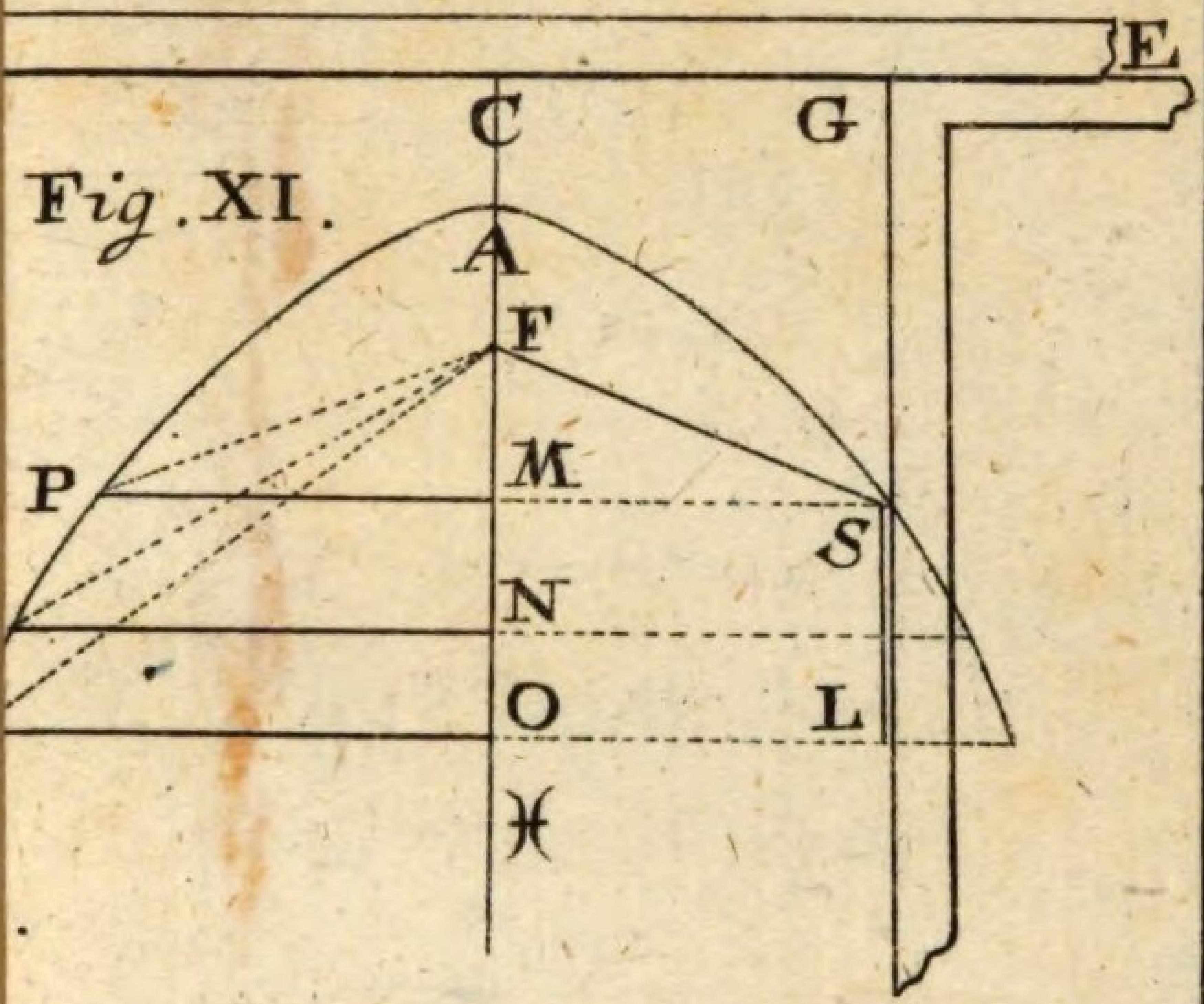


Fig. XIII.

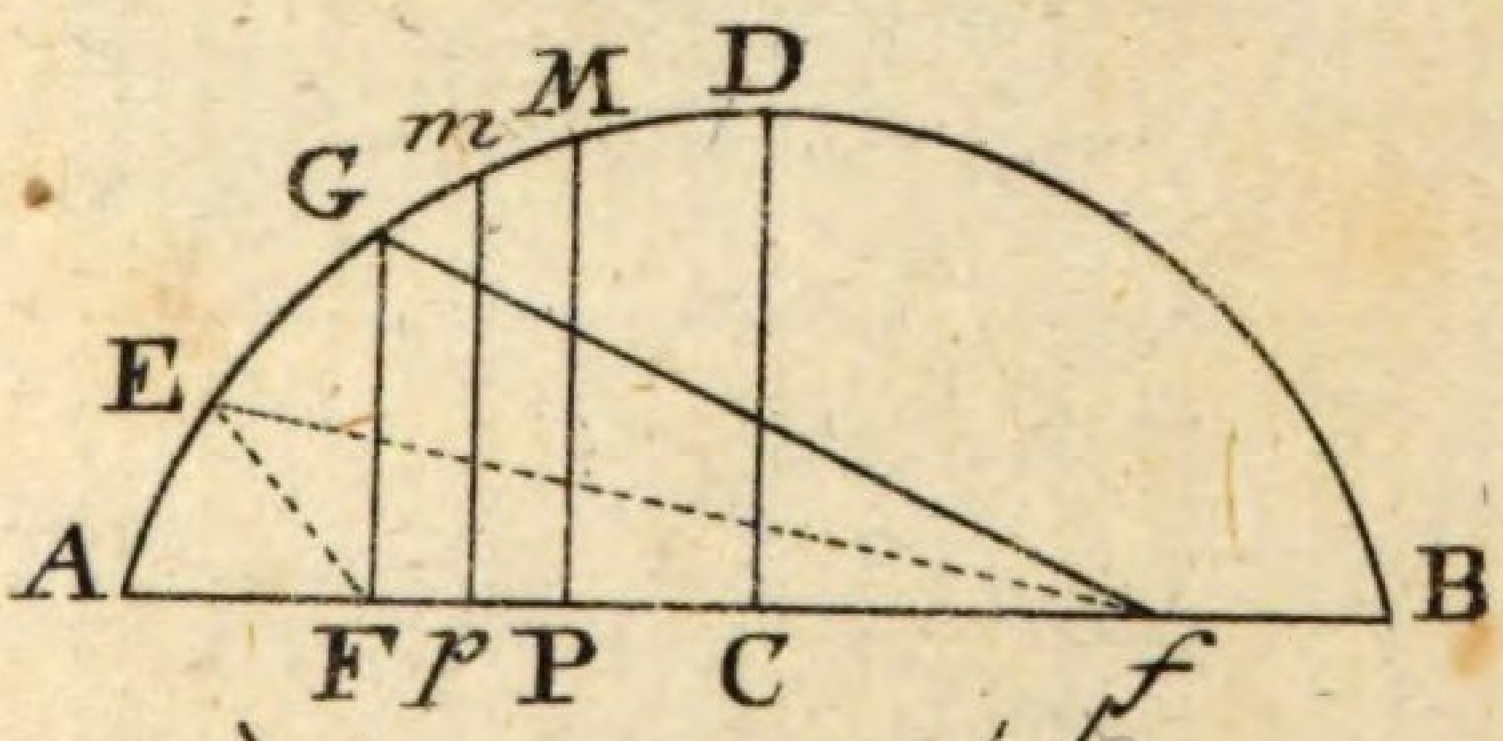
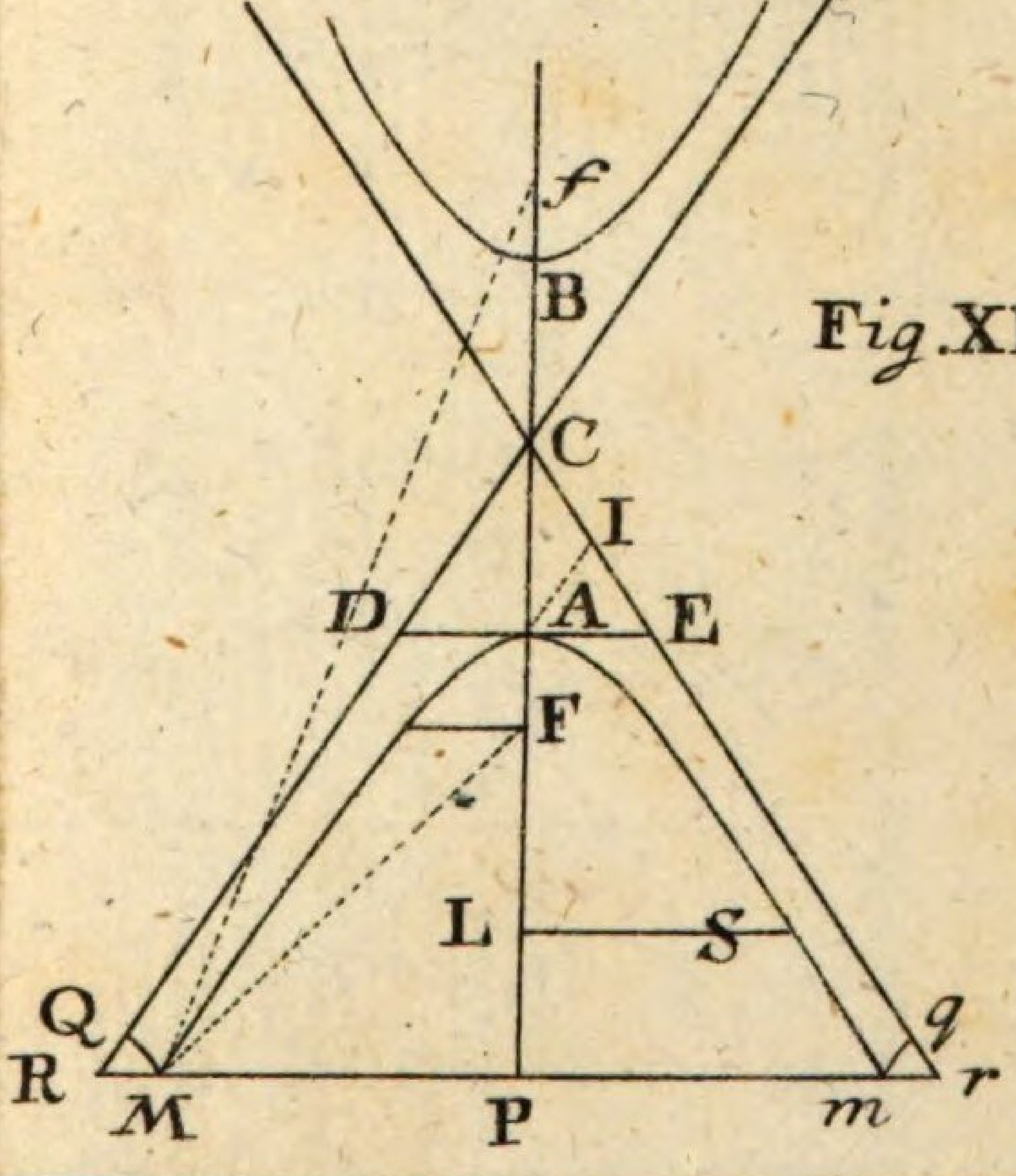


Fig. XIV.



Fecit W.V. Jocher, Ingenieur.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Jocher, Johann Wolfgang von,

Abhandlung der Algebra nebst derselben nützlichen Anwendung auf die
gemeine Rechenkunst, und auf besondere Gegenstände der Mathematik, mit den
hierzu nöthigen Kupfertabellen für Anfänger, welche diese einem
Mathematiker unentbehrliche Wissenschaft von sich selbst ohne mündliche

Augsburg 1780

Math.p. 240
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082099-4
VD18 15318834